

# El análisis modal: su aplicación a la acústica musical

(The modal analysis: application to the  
musical acoustic)

Elejabarrieta Olabarri, M<sup>a</sup> Jesús

Eusko Ikaskuntza

M<sup>a</sup> Díaz de Haro, 11-1<sup>º</sup>

48013 Bilbao

BIBLID [1137-4411 (1997), 4; 153-165]

---

*El análisis modal aplicado a la acústica musical se fundamenta en la mecánica vibracional, la acústica y la música. El análisis modal se inició con el estudio de las vibraciones en cuerdas, más tarde se aplicó de forma experimental a sistemas bidimensionales y por último se obtuvo la formulación matemática. Ha sido fundamental la importancia que ha tenido dicho análisis en la mejora de la calidad de los instrumentos musicales en concreto en los de cuerda pulsada y frotada.*

*Palabras Clave: Análisis modal. Acústica. Música.*

*Akustika musikolari aplikaturiko analisi modalak mekanika bibratzional, akustika eta musika hartzen ditu oinarritzat. Análisi modalaren eboluzioz artuko da, bere jatorrik kordetako bibratzioen ikerketatik sistema bidimensionaletarako aplikazio experimental eta ondorengo formulazio matematikora arte. Azkenik tresna musikaletan eta batez ere pulsatutako eta igurtzitako kordakoetan analisi izan duen ganatzia hartuko da kontuan*

*Giltz-Hitzak: Análisi modalak. Akustika. Musika.*

*L'analyse modale appliquée à l'acoustique musicale est formée par la mécanique vibrationnelle, l'acoustique et la musique. L'évolution de l'analyse modale a son origine à l'étude des vibrations des cordes jusqu'à son application expérimentale aux systèmes bidimensionnelles et son ultérieur formulation mathématique. L'importance qu'a eu cette analyse a été fondamentale dans l'amélioration de la qualité des instruments musicaux en général, et spécialement dans le cas des cordes frappées et frottées.*

*Mots Clés: Analyse modale. Acoustique. Music.*

El análisis modal aplicado a la acústica musical se configura a través de las siguientes disciplinas: la mecánica vibracional, la acústica y la música. La diversidad, la complejidad y la extensión de estas materias, así como el espacio de que se dispone, aconsejan acotar los temas que se van a desarrollar.

La acústica se define como la ciencia que estudia las propiedades de las vibraciones de las partículas de un medio susceptible de engendrar sonidos, infrasonidos o ultrasonidos. Desde el punto de vista de un análisis acústico se pueden considerar tres fases: la producción, la propagación y la recepción del sonido. Aquí solo se tratará de la primera de ellas: la producción de sonido, ya que es en donde se sitúan los modos y frecuencias propias de vibración del sistema emisor de sonido. Siendo la forma, la amplitud y la frecuencia de los modos, las que van a determinar las características del sonido emitido. Cabe mencionar por las aportaciones realizadas a la acústica: a J. B. J. Fourier (1768-1830) por el análisis de los sonidos complejos o musicales; a C. J. Doppler (1803-1853) por descubrir la modificación de la frecuencia de un sonido producido por una fuente móvil; a J. W. Strutt (1842-1919), conocido como Lord Rayleigh, por establecer una teoría bastante completa de la producción, propagación y difracción del sonido; a W. C. Sabine (1868- 1853) por sus estudios en acústica de salas, etc.

No se hablará de forma concreta de los científicos que han determinado la mecánica vibracional, aunque es evidente que su trabajo ha determinado los avances de la acústica y por supuesto del análisis modal. Por ello, destaquemos a: I. Newton (1642-1727), por explicar la propagación de las ondas; a B. Taylor (1685-1731), D. Bernoulli (1700-1782), L. Euler (1707-1783) y J. L. R. D'Alambert (1717-1783), por sus desarrollos matemáticos fundamentales en la ecuación de ondas para distintos medios; a J. L. Lagrange (1736-1813) por el cálculo variacional; a C. Huygens (1629-1695), G. R. Kirchoff (1824-1887),...

En primer lugar, se dará una breve reseña cronológica-biográfica de la evolución de la acústica, desde su inicio, en la escuela pitagórica (S. V a. de C.) hasta el siglo XVIII. A continuación, se tratará del análisis modal, su nacimiento en la experimentación y su posterior explicación matemática. Finalmente, como el objetivo de este trabajo es la aplicación del análisis modal a la acústica musical, se verá la importancia que ha tenido dicho análisis, en la mejora de la calidad de los instrumentos musicales, en concreto en los de cuerda pulsada y frotada.

## **LOS ORÍGENES DEL ANÁLISIS MODAL: DEL ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES EN CUERDAS AL CONCEPTO DE FRECUENCIA**

Los griegos atribuían un origen divino a la música, así como poderes mágicos. Se puede decir que el nacimiento de la acústica musical, se debe al interés de los griegos por saber el origen de los sonidos musicales, y sobre todo por conocer la razón de porque estos, son agradables.

Pitágoras (S.VI - S.V a. de C.) fue el primero que estudio el origen de los sonidos musicales. Así, en la Escuela Pitagórica se realizaron las primeras experiencias sobre vibraciones en cuerdas, demostrándose que al dividir la longitud de estas, según relaciones dadas por números enteros, los sonidos que se producían al vibrar eran concomitantes entre si.

La relación encontrada entre la razón de los números enteros y los intervalos musicales corroboraba la adoración de los griegos hacia el número y la proporción. Mediante la observación del movimiento vibratorio periódico en una cuerda, y al ser éste explicable mediante relaciones numéricas sencillas, intentaron extrapolar estos resultados a todos los movimientos que se repiten en el tiempo. Este fue el caso de los astros a los que asignaron unas relaciones de números enteros para explicar su desplazamiento, e incluso un tono musical que no podía ser percibido por el oído.

Se debe hacer notar, que Pitágoras y sus discípulos, no fueron capaces de relacionar la altura de tono con la frecuencia de vibración, sólo la relacionaron con la longitud de la cuerda vibrante.

Por otra parte, se cree que hacia el siglo III a. de C., en China<sup>1</sup>, ya se conocían las relaciones armónicas existentes entre los sonidos. Muestra de ello, son una serie patrón de tubos consistentes en unas flautas de caña denominadas *liu*, con las que fijaron las alturas de los tonos y los intervalos musicales.

Las aportaciones de Galileo Galilei (1564-1642) al campo de la acústica, están relacionadas con el estudio de las oscilaciones del péndulo, de las cuales dedujo el concepto de *frecuencia*, de esta última así como de las oscilaciones se hablará a continuación, ya que son sus aportaciones a la acústica. Parece ser, que un día mientras estaba sentado en la Catedral de Pisa asistiendo a un servicio religioso, se entretuvo observando la oscilación de la lámpara del Santuario, comprobando que el tiempo que tardaba en dar una vuelta completa era siempre el mismo. Con esta observación, comenzó a estudiar el movimiento de los péndulos y de los sistemas vibratorios en general.

Todas las deducciones realizadas por Galileo, sobre vibraciones de cuerpos, las escribió en *Discorsi Intorno a Due Nuove Scienze*, publicado en 1638. Comenzó con la observación del isocronismo del péndulo simple y de la dependencia de la frecuencia de vibración de éste, con su longitud y continuo con el estudio de las relaciones que existen entre el tono de una cuerda vibrante y su longitud, para concluir con el significado físico del número de vibraciones por unidad de tiempo: *frecuencia*.

Galileo descubrió, accidentalmente, que podía obtener un sonido con una altura dada rascando una plancha de bronce con un cincel de hierro afilado<sup>2</sup>. Los surcos delgados, paralelos y equidistantes que quedaban en la plancha, eran testigos permanentes de las vibraciones del cincel que los había rayado. El sonido producido daba una sensación de altura de tono determinada, y a medida que se rascaba más rápido aumentaba dicha altura.

Así, Galileo explicó claramente en el *Discorsi...*, la relación entre la altura y la frecuencia de vibración de una cuerda, aunque refiriéndose solo a los números relativos de vibraciones por segundo correspondientes a diversos intervalos musicales. Además realizó una interesante comparación entre las vibraciones de la cuerda y del péndulo, en el intento de explicar la razón de frecuencia entre sonidos contiguos.

---

1. Véase BENADE [1990]

2. Véase PIERCE [1989]

Parece ser que el interés que demostró Galileo<sup>3</sup> por las vibraciones, y en concreto por la altura de tono, se debe en gran medida a que nació y creció en un ambiente musical, ya que su padre era violinista.

Las aportaciones de Marín Mersenne (1588-1648) al conocimiento de la humanidad, son más bien escasas, pero sus estudios sobre acústica han sido fundamentales. Como musicólogo, se conocen sus escritos sobre teoría musical, así como documentos de incalculable valor histórico, ya que en ellos describe los instrumentos musicales de su tiempo. Como físico, realizó medidas de frecuencias audibles, y fue el primero en determinar la velocidad del sonido en el aire, así como las leyes que determinan la frecuencia y el período de vibración de las cuerdas.

El libro más importante publicado por Mersenne fue *Harmonie Universelle*, en 1636. Este libro está dedicado a la teoría musical y a la acústica. En él, relaciona la altura de tono con el número real de vibraciones por segundo, al igual que Galileo, con cuyo trabajo estaba familiarizado.

En el estudio del sonido y sus efectos sobre el oído, demostró que el tono es proporcional a la frecuencia, y de aquí que los intervalos musicales (octava, quinta, cuarta,...) son razones de las frecuencias de vibración producidas por los instrumentos.

Utilizando cuerdas esparto, gruesas y largas, y sometiénolas a tensiones conocidas, fue capaz de establecer la relación existente entre estos parámetros y el número de vibraciones de dichas cuerdas. Desde Pitágoras se conocía que la altura de tono era inversamente proporcional a la longitud de las cuerdas (L), Mersenne estableció que esta altura de tono, ya identificada como frecuencia, era directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión (T) a la que estaba sometida la cuerda, e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad lineal ( $\rho_L$ ) de la misma, con lo que obtuvo la expresión analítica:

$$f = \frac{k}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho_L}}$$

El factor de proporcionalidad K, lo determinó<sup>4</sup> contando el número de vibraciones por segundo en cuerdas muy largas, tanto en una cuerda de esparto de 27'4m de longitud y de diámetro 2.1mm, como en un alambre de 42'1m de longitud y 0.5mm de diámetro, obteniendo para K un valor de 1/2

De esta forma, Mersenne obtuvo de una forma empírica, las leyes de vibraciones de las cuerdas de esparto, y luego extrapoló los resultados a las cuerdas de los instrumentos.

También de forma aproximada, dio por primera vez el valor de la velocidad del sonido en el aire en el año 1636. Para ello midió el intervalo de tiempo que mediaba entre el momento de ver el fogonazo de un cañón a una distancia conocida y el momento de oír el corres-

3. Véase JOHNSTON [1989]

4. Véase PIERCE [1985]

pondiente sonido. Una medida más satisfactoria de esta magnitud se realizó hacia 1750 bajo la supervisión de la Academia de Ciencias de París.

Mersenne, también fue el que inició el estudio acústico de las campanas. Creía que el sonido emitido por las campanas de los templos podía dispersar las nubes de las tormentas gracias a que eran objetos sagrados y a su movimiento vibratorio. A pesar de estos pensamientos más o menos esotéricos, las tablas que llegó a publicar del tamaño y del tono de todas las grandes campanas de Europa existentes en su época, han sido la fuente de numerosas investigaciones que se han desarrollado hasta la actualidad, en lo que se conoce como acústica de las campanas.

Curiosamente, aunque Mersenne habló de *tono* de las campanas, éste no se debe interpretar como sonido musical periódico, ya que los armónicos más agudos emitidos por una campana no son equidistantes, aunque si se les puede asociar una altura de tono que no coincide con el fundamental (parcial más grave), sino con un promedio de los intervalos de frecuencia entre algunos de los parciales más graves del sonido emitido. El tono emitido por una campana queda determinado por los cinco modos de vibración más bajos, cuyas frecuencias siguen la razón 1:2:2'4:3:4. Los seis parciales siguientes establecen el timbre<sup>5</sup>. Estos parciales presentan en sus razones de frecuencia una dispersión del 4% con respecto a las campanas ideales cuyos parciales coinciden con la serie armónica. Los armónicos más importantes, en cuanto a la emisión de sonido se refiere, son aquellos cuyos modos de vibración tienen un movimiento normal a la superficie de las campanas. Las teorías y descubrimientos de Mersenne no fueron tomadas en consideración ni aceptadas por la sociedad de su época.

## ANÁLISIS MODAL

El francés Joseph Sauveur (1653-1716), parece ser que fue el primero en sugerir el nombre de *acústica*, para la ciencia del sonido. Su interés por el sonido se debió en gran medida a las dificultades que tuvo con el habla y con la audición desde su niñez<sup>6</sup>. Al igual que Mersenne, Sauveur utilizó la música para obtener información sobre el sonido y las vibraciones.

Comenzó su trabajo en acústica, desarrollando un método de clasificación de las escalas musicales y determinó mediante dos órganos de tubos la razón de frecuencias de un semitono, obteniendo que dicha razón era de 15/16 y que al sonar conjuntamente daban 6 batidos o pulsaciones por segundo. Trató este número como la diferencia entre las frecuencias de los tubos, llegando a la conclusión de que esos números debían ser 90Hz y 96Hz respectivamente.

Sauveur sobre todo destacó por sus trabajos en cuerdas. Determinó que una cuerda tensada tiene ciertos puntos al vibrar que no se desplazan de su posición de equilibrio, a estos puntos los llamó *nodos*. Por contra hay otros puntos de máximo desplazamiento que denominó *vientres*. Así mismo observó que cada vibración que se producía en la cuerda, estaba formada por varios movimientos periódicos secundarios con frecuencias que eran múlti-

5. Véase ROSSING [1991]

6. Véase GILLISPIE [1980, vol. 12]

plos enteros de la frecuencia del movimiento simple, que era el que se obtenía al desplazar el punto central de la cuerda tensada y fijada en los extremos de su posición de equilibrio. Como conclusión dedujo que una cuerda al vibrar producía un sonido que era el resultado de la superposición de todos los movimientos secundarios que vibraban simultáneamente. Los sonidos asociados a estos sobre tonos o movimientos secundarios, los denominó *tonos armónicos*, mientras que al sonido asociado con la vibración simple lo denominó *fundamental*. Esta notación la introdujo hacia 1700, y sigue vigente hoy en día. Sauveur condensó todo su trabajo en un tratado denominado *Sur la Détermination d'un son fixe*, publicado en París en 1703

La solución matemática de el problema de vibración de las cuerdas se debe a Taylor que en 1713 estableció que la forma de la curva que describe una cuerda al vibrar era tal que todos los puntos alcanzaban la posición de equilibrio en el mismo tiempo. D'Alambert, en 1750, presentó la ecuación diferencial del movimiento de una cuerda tratada como un medio continuo. A Bernoulli se debe el *principio de superposición* de pequeñas oscilaciones, que establece que el desplazamiento de un punto de la cuerda en un instante dado, es la suma algebraica de los desplazamientos de cada armónico simple. A partir de dicho principio, D'Alambert y Euler, expresaron el modo de vibración de una cuerda en términos de una serie infinita de senos y cosenos, anticipo de lo que más tarde hizo Fourier con la descomposición de un movimiento vibratorio complejo.

Lagrange en 1759<sup>7</sup>, supuso que la cuerda estaba constituida por un número finito e igualmente espaciado de partículas con masas idénticas y estudió el movimiento de este sistema. Considerado de esta forma el sistema, estableció la existencia de un número de frecuencias independientes igual al número de partículas. Por lo tanto, discretizó el sistema, ya que asoció a cada partícula una frecuencia de vibración y consideró que cada masa se comportaba como un oscilador armónico simple. En la actualidad, este planteamiento es la base del análisis modal mediante elementos finitos.

El alemán Ernst F. F. Chladni (1756-1827) se dedicó exclusivamente a la ciencia, siendo la acústica experimental su área de investigación principal. Esta elección estuvo muy influenciada por el interés que mostraba por la música, ya que se le puede considerar como un músico aficionado. Además, mostró gran afición por el diseño y la construcción de instrumentos musicales, como es el caso del *Euphonium* y el *Clavicylinder*, ambos instrumentos de teclado, caracterizados por su sonido agradable, de estilo vidrioso. Al final de su vida investigó el sonido de las campanas, siguiendo la línea que un siglo antes había marcado Mersenne.

Excepto por unas pocas publicaciones sobre meteoritos, en las que propone su origen extraterrestre, Chladni, se dedicó exclusivamente al estudio de la acústica y de las vibraciones. Su aportación más importante fue la demostración experimental de las vibraciones en las superficies de placas, usando una técnica de esparcimiento de arena que el mismo había diseñado.

El resultado de su primer proyecto, un estudio de las vibraciones en placas, fue publicado en 1787. A partir de este momento su vida transcurrió entre períodos en su casa de Wittenberg, donde realizaba los experimentos y los escritos sobre acústica, y los viajes por Eu-

---

7. Véase ROSSING, FLETCHER [1991]

ropa difundiendo el método de las figuras de arena y los instrumentos musicales diseñados por él. Estos viajes le permitieron contactar con personas tan diferentes como Goethe, Olbers, Laplace y otros.

A lo largo del siglo XVII, los científicos emprendieron diversos trabajos experimentales y teóricos sobre vibraciones en cuerdas, como es el caso de Sauveur, y también realizaron algún intento por descubrir las vibraciones en barras y en membranas que no fructificaron. Este desconocimiento de las vibraciones en placas lo recalcó Chladni en su primer artículo.

El método experimental diseñado por Chladni consistía en extender arena sobre las placas en estudio y excitar el sistema tocando cerca de los bordes de las placas una escala musical con un violín. Así observó las vibraciones que resultaban en dichas placas, ya que la arena comenzaba a vibrar para ciertos fundamentales emitidos por el violín, desplazándose hasta ciertos puntos que estaban inmóviles. Esta distribución de arena estática configuraba las líneas nodales para la frecuencia correspondiente, es decir, el modo de vibración. Estas formas modales (círculos, estrellas y otras formas geométricas), que se perfilaban sobre la placa eran simétricas, lo cual hoy es evidente ya que las placas isótropas también lo eran.

En un principio Chladni utilizó placas de vidrio circulares de tres a seis pulgadas de diámetro, después fue extendiendo su estudio a rectángulos, elipses, semicírculos, triángulos y polígonos regulares de seis lados. Por lo general estas placas las fijaba en un punto interno que en ocasiones coincidía con el centro geométrico de la placa. Así, al comenzar a vibrar la placa por resonancia con las frecuencias emitidas por el violín, este punto constituía un nodo de vibración, siendo a priori el resto de la placa libre. En muy pocas ocasiones obtuvo líneas nodales en el borde de las placas.

Chladni clasificó los modos de vibración de acuerdo a la geometría y al tono que presentaban. De esta forma estableció que tanto las formas modales como los sonidos de una placa vibrando son análogos a los tonos y formas modales de la serie armónica de una cuerda.

Además de este análisis de las vibraciones en placas, estudió el movimiento vibratorio en barras de sección cilíndrica y de sección prismática, con el mismo método de la arena empleado en las placas. A partir de este estudio dedujo la velocidad longitudinal del sonido en los sólidos, partiendo del tono que producía una barra larga de un material homogéneo cuando se le sometía a vibrar longitudinalmente.

También midió la velocidad del sonido en gases similares al aire, comparando el tono emitido por un instrumento de viento llenado con el gas en estudio, con el tono normal que emitía dicho instrumento bajo unas condiciones atmosféricas standard. Posteriormente, científicos como S. D. Poisson (1781-1840) o J. B. Biot (1774-1862) prestaron mucha atención a estas investigaciones.

Las publicaciones más importantes realizadas por Chladni en lo que acústica se refiere son: *Entdeckungen über die Theorie des Klanges* (Leipzig, 1787), *Die Akustik* (Leipzig, 1802), tratado que contiene la historia completa de la acústica hasta los días de Chladni, traducido al francés en 1809, y *Neue Beiträge zur Akustik* (Leipzig, 1817).

Los modos visibles de vibración de las placas despertaron un gran interés entre los hombres de ciencia entre 1820 y 1830. En Alemania, F. Strehlke continuó con las investiga-

ciones experimentales iniciadas por Chladni; W. E. Weber (1804-1891) dedicó su tratado de ondas al mismo. Así mismo, en Inglaterra científicos como T. Young (1773-1829) o M. Faraday (1791-1867), se interesaron por los trabajos del alemán. Pero hay que destacar en especial el interés que despertaron los modos de vibración obtenidos por Chladni en la comunidad científica francesa. A F. Savart (1791-1841), se puede considerar el sucesor de las investigaciones experimentales de Chladni. Este impacto de los experimentos de Chladni se debe a la visita que realizó a la Academia de Ciencias de París en 1808<sup>8</sup>, demostrando los modelos de vibración ante un público en el que se encontraba Napoleón. Tras la demostración, los físicos de la Academia francesa convocaron un concurso, con una dotación de 3000 francos como premio, al mejor estudio matemático de vibraciones elásticas que pudiera demostrar aquellas distribuciones de arena.

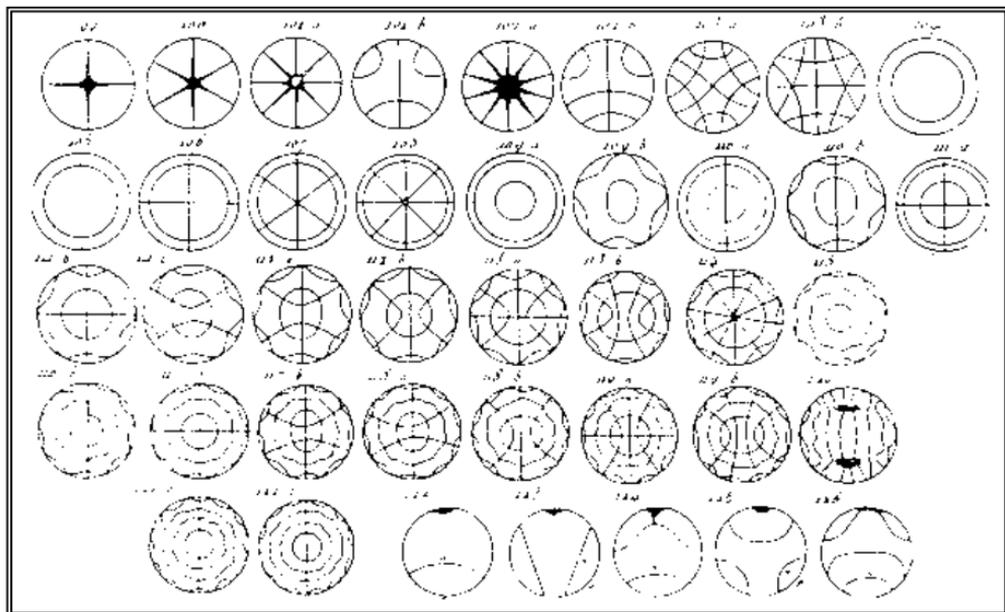


Figura 1: Modos de vibración de una placa circular de vidrio obtenidos por Chladni

La matemática francesa Sophie Germain (1776-1831) obtuvo importantes resultados en el campo de las matemáticas aplicadas a la acústica y a la elasticidad<sup>9,10</sup>. Son estas aplicaciones las que son de interés para el análisis modal acústico. Ante la demostración realizada por Chladni de los modos de vibración en placas circulares y rectangulares de vidrio o metal, en la Academia de Ciencias en París en 1808, los científicos franceses se plantearon formular una teoría matemática de vibración de superficies elásticas e indicar como dicha teoría se corresponde con la evidencia.

8. Véase RAYLEIGH [1945]

9. Véase BELL [1993]

10. Véase GILLSPIE [1980, vol. 6]

Influenciados por Lagrange, muchos matemáticos desistieron de intentar resolver el problema, ya que este aseguraba que los métodos matemáticos disponibles eran inadecuados para la resolución. Sin embargo, Sophie Germain presentó una memoria anónima, pero el premio quedó desierto. A partir de las hipótesis fundamentales presentadas en dicha memoria, Lagrange dedujo la ecuación correcta en derivadas parciales para las vibraciones de placas planas elásticas. En 1816, el premio convocado por la Academia se le adjudicó finalmente a Germain, alcanzando así la cima en su carrera científica.

Tras extender y mejorar la memoria premiada, publicó en 1821 un trabajo titulado: *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques et équation générale de ces surfaces*. En este trabajo, Germain formuló que la ley para las vibraciones en superficies elásticas está dada por una ecuación de cuarto orden en derivadas parciales:

$$N^2 \left[ \frac{\partial^4 \rho}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \rho}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \rho}{\partial y^4} - \frac{4}{S^2} \left\{ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right\} \right] + \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0$$

$$\rho = \rho(x, y, t)$$

Donde  $\rho$  representa el desplazamiento en la dirección perpendicular a la superficie del plano de la placa y  $N$  es una constante física si la superficie es una membrana elástica de espesor constante. La generalización de la fórmula de Lagrange, válida para superficies planas, está en la variable  $S$  que representa la curvatura de una superficie y que puede variar de un punto a otro. De esta forma, fue Germain quién estableció el concepto de Curvatura Media.

El concepto de curvatura de una superficie generaliza el caso de la curvatura de una curva. A través de las normales se consideran las curvaturas de todas las secciones planas de la superficie, y calculando la media aritmética de los valores extremos de estas curvaturas se obtiene la *curvatura media*. Mientras que la *curvatura gaussiana*, media geométrica de los valores extremos de las curvaturas, caracteriza la geometría local de la superficie, la curvatura media es más útil para aplicaciones en la teoría de elasticidad.

En el caso de un plano, la curvatura media es infinita en todos los puntos de la superficie. De aquí, que el término  $4/S^2$  de la ecuación diferencial de Germain sea nulo, reduciéndose dicha ecuación a la que ella y Lagrange habían deducido para superficies planas.

Germain, en sus últimas publicaciones, consideró la posibilidad de que las placas tuvieran el espesor variable, entrando ya en lo que se conoce como elasticidad de sólidos.

Hay que decir que la solución de la ecuación fue matemáticamente incorrecta, ya que la elección de las condiciones de contorno no fueron las idóneas. Hasta 1850 no se llegó a obtener la solución correcta y completa de la ecuación. Dicha solución la obtuvo el físico alemán Kirchoff, que fue el predecesor de H. Von Helmholtz (1821-1894) en la universidad de Berlín.

## EL ANÁLISIS MODAL APLICADO A LA ACÚSTICA MUSICAL

Uno de los grandes misterios de la historia de la música ha sido la habilidad de los maestros luthiers de antaño, como fue el caso de las familias Guarnerius y Stradivarius. Sin más que un conocimiento empírico de la física y de la acústica de sus instrumentos, estos artesanos construían violines que todavía hoy se aprecian por su timbre y su sonido nítido. Mediante gol-

pes en las tapas determinaban auditivamente la afinación de los modos de vibración más bajos de la tapa y del fondo, los cuales los ajustaban eliminando madera de diferentes zonas.

Desde el siglo XIX hasta la actualidad, muchos científicos se han interesado por las propiedades acústicas de los instrumentos musicales con el fin de correlacionar dichas propiedades con la calidad del sonido emitido por los instrumentos.

Uno de los primeros científicos en preguntarse que sonidos debían de producir la tapa y el fondo de un violín, antes de su ensamblaje para obtener un instrumento óptimo, fue el físico Felix Savart(1791-1841)<sup>11</sup>. El tuvo la oportunidad de ensayar con tapas y fondos de violines sueltos gracias a la colaboración del luthier Vuillaume. Para el estudio de estos elementos aplicó el método diseñado por Chladni, con esta técnica obtuvo una distribución de líneas nodales a unas frecuencias de resonancias muy definidas. Estos modos normales de vibración son patrones de ondas estacionarias y dependen de la rigidez, de la masa, de la geometría y de la distribución de espesores del elemento en estudio. Con estas observaciones, Savart comprobó que los mejores violines guardaban una relación de afinación entre tapa y fondo de una 2<sup>a</sup>M o de una 2<sup>a</sup>m. También estudió el efecto que tiene el puente del violín en la radiación de sonido del instrumento. La forma y la masa del puente, así como la posición de este sobre la tapa del violín, van a determinar la curva de respuesta en frecuencias del instrumento.

Dentro del estudio de la Acústica de los instrumentos de cuerda frotada, H. Helmholtz (1821-1894) determinó con experimentos físicos y psicoacústicos el movimiento de las cuerdas del violín al ser frotadas con el arco. Con el microscopio propuesto por J. A. Lissajous (1822-1880) observó el patrón triangular que se formaba en la forma de onda al desplazarse la cuerda enganchada con el arco. Hoy, este patrón se conoce como Movimiento de Helmholtz.

Con el fin de identificar los parciales de varios tonos del violín, utilizó resonadores esféricos de diferentes volumen y área de abertura, conocidos como Resonadores de Helmholtz, y así cubrir una amplia gama de frecuencias. Si la onda sonora incidente tenía una componente de frecuencia coincidente con la frecuencia de resonancia de algún resonador en particular, se producía una presión sonora a esta frecuencia fuertemente amplificada dentro de la cavidad del resonador. A esta frecuencia se le conoce como la Resonancia de Helmholtz o Fundamental de Aire y aparece en todos los instrumentos con caja de resonancia. El resonador de Helmholtz consiste en una cavidad rígida de volumen  $V$ , con un cuello de área  $S$  y longitud efectiva  $L$ . Si la longitud de onda es mucho mayor que  $L$  y que  $S^{1/2}$ , el fluido en el cuello se mueve como una unidad y la apertura radia sonido como una fuente simple<sup>12</sup>. La resonancia fundamental de aire es independiente de la forma de la cavidad y su frecuencia viene dada por la siguiente expresión:

$$f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{LV}}$$

Existen resonancias de aire superiores a la fundamental cuyo origen se debe a las ondas estacionarias que resultan en la cavidad, por lo tanto dependen de la geometría de dicha cavidad más que del movimiento oscilatorio de la masa del fluido en el cuello. En consecuencia, estas frecuencias superiores no están relacionadas armónicamente con la fundamental.

11. Véase HUTCHINS [1981]

12. Véase KINSLER [1988]

A Helmholtz también se debe una primera teoría de la audición y un estudio sobre el timbre de los sonidos.

En 1930, H. Meinel estableció la correlación entre el espesor de las tablas y los modos de vibración de las partes del violín, con la intensidad y el timbre del sonido del instrumento completo. También estudió la posibilidad de mejorar un violín en una determinada región de frecuencias eliminando madera de ciertas zonas de las tapas, pero no llegó a ninguna conclusión, ya que una pequeña modificación puede mejorar sustancialmente un instrumento, pero en otro puede influir negativamente. En 1950, Meinel fue el primero en utilizar sensores y transductores para detectar el desplazamiento de las tapas del violín al ser excitadas con un ruido.

El físico americano F. Saunders (1875-1963) verificó los descubrimientos de Savart, dedicándole un interés especial a la resonancia fundamental de aire o de Helmholtz y a la fundamental de la tapa. Llegó a la conclusión que en los buenos violines la resonancia de Helmholtz se debía dar en la tercera cuerda (293Hz, RE<sub>4</sub>), y la de la tapa en la segunda cuerda (440Hz, LA<sub>4</sub>).

Saunders también destaca por los estudios comparativos que realizó entre violines antiguos y nuevos con el fin de establecer unos criterios de calidad. Para ello se basó en los espectros que presentaban dichos instrumentos.

C. V. Raman (1888-1970), al igual que Saunders, es conocido por sus investigaciones en espectroscopia por las que obtuvo el Premio Nobel. Dentro de la Acústica, destaca por las aportaciones al conocimiento del violín. Demostró que la mínima fuerza necesaria, ejercida por el arco, para mantener estable el movimiento de la cuerda varía directamente con la velocidad del arco e inversamente con el cuadrado de la distancia al puente.

Raman, también estudió el acoplamiento de las vibraciones de las cuerdas con la caja de resonancia del violín, en especial *La Nota del Lobo*<sup>13</sup>. Este sonido aparece cuando la caja presenta una resonancia con un alto factor de calidad, y con una amplitud y frecuencia similar al fundamental de una de las cuerdas. En estas condiciones, el resultado es que las vibraciones de la cuerda y de la caja aumentan y disminuyen alternativamente en amplitud. El tono emitido tiene una variación fuerte en frecuencia, entorno a los 5Hz, dando lugar a batidos e imposibilitando que el instrumentista mantenga un sonido firme con el arco. La viola y el chelo son más susceptibles a la Nota del Lobo que el violín. Esta susceptibilidad se debe a dos razones: una es que la impedancia cuerda/caja es menor en los instrumentos mayores, y la otra razón tiene que ver con la longitud del puente. Cuanto más largo sea éste, más se reduce la impedancia de las cuerdas, ya que este parámetro decrece con el cuadrado de la longitud del puente.

A. C. M. Hutchins (1911- ) se le puede considerar como la pionera en la aplicación del análisis modal, holografías, y de los métodos científicos en general a la construcción de instrumentos musicales. En la *figura 2*, se muestran las holografías correspondientes a los seis primeros modos de la tapa y del fondo sueltos de un violín, obtenidos por Hutchins<sup>14</sup>. En la parte superior, aparecen los interferogramas con los modos de la tapa y en la inferior los del fondo. El número que aparece junto a cada figura es la frecuencia en hercios a la que se dan

13. Véase BENADE [1981]

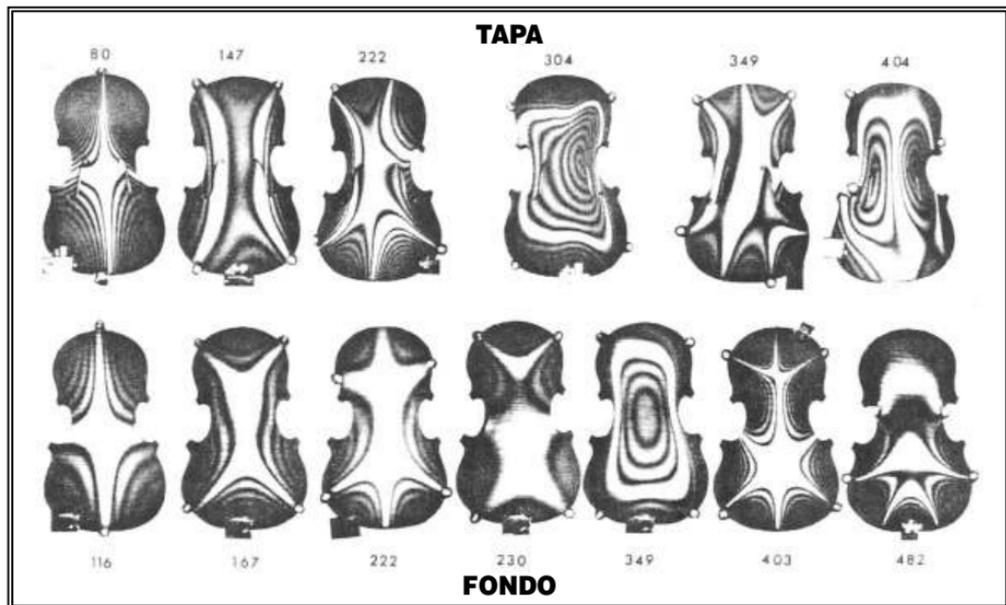
14. Véase HUTCHINS [1981]

estas resonancias. Aunque la configuración geométrica de los modos de los violines es muy similar en todos ellos, las frecuencias varían con las dimensiones, el espesor y la rigidez de la tabla. Hutchins ha llegado a la conclusión que los mejores violines son aquellos en que los modos 1, 2 y 5 de la tapa forman una serie armónica.

Junto con Saunders, ha diseñado y construido una familia de ocho instrumentos del tipo violín. Esta familia cubre el rango de registros que abarca la música orquestal.

E. Jansson ha realizado un estudio acústico de la guitarra que abarca diferentes aspectos de este instrumento<sup>15</sup>. Por un lado, mediante interferogramas holográficos ha establecido las distorsiones que se dan en la tapa armónica cuando se le somete a fuerzas estáticas paralelas y perpendiculares al puente. Este estudio ha sido fundamental para entender el timbre y la velocidad con que decae el sonido del instrumento al pulsar las cuerdas en diferentes direcciones. También ha realizado estudios comparativos entre guitarras de calidad media y alta, en base al espectro que presentaban y al sonido que radiaban, con el fin de establecer unos criterios de calidad acústicos para este instrumento. En la *figura 3* se ven los cinco primeros modos del instrumento completo encajado en arena, tal que las condiciones del contorno en el borde tienen desplazamiento nulo, de aquí que las líneas nodales que aparecen en la figuras se sitúan en el borde de la tapa. Las frecuencias a las que se dan son aproximadamente: 200Hz, 300Hz, 400Hz, 500Hz y 600Hz, que como se observa siguen una serie armónica. También ha desarrollado métodos de medida de alta precisión, con el fin de perturbar al sistema mínimamente.

Así mismo Jansson, junto con J. Alonso Moral, ha realizado una clasificación de los modos de la tapa, del fondo, del aire y del cuerpo de un violín por rangos de frecuencia. También destacan sus investigaciones sobre el desplazamiento y el tiempo de contacto de las cuerdas y el martillo, en diversas notas del piano.



15. Véase JANSSON [1983]

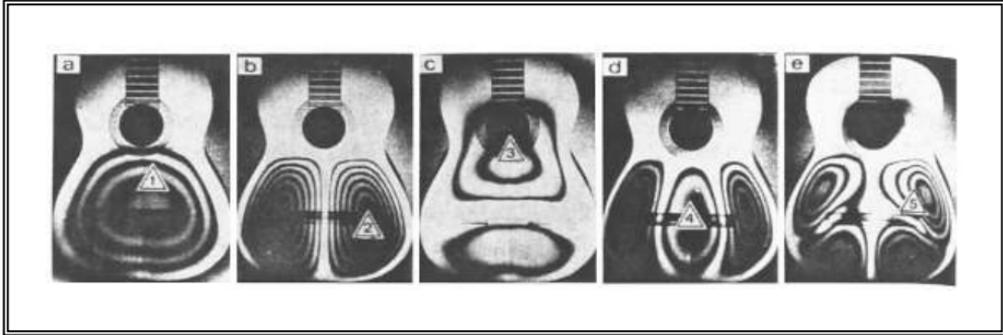


Figura 2: Modos de vibración obtenidos con interferogramas holográficos de la tapa y del fondo libres de un violín [HUTCHINS, 1981]

Figura 3: Modos de vibración de una tapa de guitarra, encajado el instrumento completo en arena. [JANSSON, 1983]

## BIBLIOGRAFÍA

- BELL, E.T. (1993) *Men of Mathematics*. New York, Simon & Schuster.
- BENADE, A.H. (1990) *Fundamental of musical acoustics*. New York, Dover Publications
- GILLISPIE, C.C. (1980) *Dictionary of Scientific Biography*. New York, 16vols.
- HUTCHINS, C.M. (1981) "The acoustics of violin plates". *Scientific American* 245(4).170-186.
- JANSSON, E.V. (1983) *Acoustics for the guitar player*. Royal Academy of Music.
- JEANS, J. (1937) *Science & Music*. New York, Dover Publications.
- JOHNSTON, I. (1989) *Measured Tones*. Philadelphia, IOP.
- KINSLER, L., FREY, A.R., COPPENS, A.B., SANDERS, J. (1988) *Fundamentos de Acústica*. Barcelona, Limusa.
- PIERCE, J.R. (1985) *Los sonidos de la música*. Barcelona, Prensa Científica.
- RAYLEIGH, J.W.S. (1945) *The theory of sound*. New York, Dover Publications, 2 vols.
- ROSSING, T.D. (1982) *The Science of Sound*. 1ª edición, Massachusetts, Addison-Wesley, Reading.
- ROSSING, T.D., FLETCHER, N.H. (1991) *The Physics of Musical Instruments*. New York, Springer-Verlag.