Pseudoigualdades de segundo orden*

(Second order false equalities)

González, León; Marín, Angel
Universidad Pública de Navarra
Departamento de Matemática e Informática
Campus Arrosadía
31006 Pamplona
amarin@upna.es

BIBLID [1137-4411 (1997), 4; 183-197]

En el presente trabajo se aplican a la relación de igualdad métodos de extensión que permiten obtener en un marco homogéneo medidas de contraste o semejanza entre subconjuntos borrosos, la mayoría de las cuales han aparecido de forma diversa tanto en el análisis matemático como en ciertas aplicaciones de la lógica borrosa.

Palabras Clave: Lógica borrosa. Igualdad. Operador implicación.

Lan honetan berdintasun erlazioarentzat hedadura metodoak sartu dira. Metodo hauek azpimultzo fuzzyen arteko desberdintasun edo antzekotasun neurriak marko berbera batetan eskaintzeko laguntzen dute. Neurri horietako gehienak analisi matematikoan eta logika fuzzyaren zenbait aplikaziotan agertu dira ere.

Giltz Hitzak: Logika lausoa. Berdintasuna. Inplikazio eragilea.

Ce travail propose l'application à la relation d'égalité de différentes méthodes d'extension, qui permettent réunir d'une façon homogéne des mesures de contraste ou similarité entre sous-ensembles flous déjà apparues de forme diverse aussi bien dans l'analyse mathématique que dans certaines applications de la logique floue.

Mots Clés: Logique confuse. Egalité. Opérateur implication.

* Financiado parcialmente con cargo al proyecto PB94-0424 de la DGICYT.

1. PRELIMINARES

La relación de igualdad ocupa una posición central en el desarrollo de cualquier teoría matemática, pero las exigencias de precisión que impone son difíciles de complir cuando los términos comparados son estructuralmente complejos. En tales casos se hace preferible el empleo de formas de igualdad aproximada o atenuada. La renuncia a una precisión que resulta de la identidad y sustituibilidad de los términos conlleva una formulación matemática de la imprecisión en que tales propiedades no son ya imprescindibles. Esta formulación afecta directamente a la idea de igualdad, de la que se alcanzan variantes con imprecisión, al menos por tres vías finalmente concurrentes. En la primera de ellas se consideran las pseudoigualdades como medidas de aproximación, lo que sitúa su estudio en el ámbito de la Topología. También puede considerarse la igualdad como la interpretación numérica de la equivalencia lógica y, en este sentido, asociarse a las posibles formulaciones que en el cálculo de predicados admiten las conectivas lógicas ordinarias. Cuando estas conectivas aparecen en el marco de una lógica multivaluada la equivalencia lógica podrá evaluarse en un rango finito de valores veritativos, a través de los cuales se fijará el grado de igualdad entre las fórmulas del cálculo. Una última vía en la que se combinan tanto el enfoque métrico como el lógico es la que resulta del estudio de la igualdad y sus variantes en el marco de la lógica borrosa.

Como quiera que este último será el marco escogido para el análisis, introduciremos algunos de los conceptos básicos. Es sabido que los conjuntos borrosos, que constituyen el fundamento de la lógica borrosa [14], aparecen al generalizar el concepto de función característica de un conjunto. Si un subconjunto ordinario A de X se puede caracterizar mediante una función $A(x)$ que toma valor 1 cuando $x \in A$ y 0 en caso contrario, y por tanto tal que $A(x) \in \{0,1\}$ para cualquier $x \in X$, en el caso borroso haremos que dicha función, que llamaremos de pertenencia, tome valores en [0,1]. El conjunto de todas las funciones así obtenidas compone lo que llamaremos la clase $\mathrm{F}(X)$ de subconjuntos borrosos de X. Se extienden a estos subconjuntos las operaciones ordinarias de unión, intersección y complementación, definiendo los subconjuntos

$$\begin{aligned} (A \cup B)(x) &= \max(A(x),B(x)) \\ (A \cap B)(x) &= \min(A(x),B(x)) \\ A^c(x) &= 1 - A(x) \end{aligned}$$

para cada $x \in X$. Fácilmente se comprueba que tales definiciones son aplicables al caso ordinario, y que constituyen una extensión de las operaciones ordinarias.

La generalización de las relaciones binarias, que están en el origen de igualdades y equivalencias, se obtiene por la misma vía. Teniendo en cuenta que las relaciones en X son subconjuntos de $X \times X$, es natural considerar las relaciones borrosas en X como subconjuntos borrosos en $X \times X$ es decir elementos de $\mathrm{F}(X \times X)$. Para la relación R el valor $R(x,y) \in [0,1]$ representará el grado de pertenencia. Además, para estas relaciones se han definido propiedades estructurales de reflexividad, transitividad, etc., congruentes en las relaciones ordinarias con las propiedades conocidas (cf. [12]).

En este trabajo nos proponemos construir relaciones de pseudoigualdad entre subconjuntos borrosos de X a partir de la relación de igualdad de elementos en X. Para ello aplicaremos a la igualdad ordinaria aquellos métodos que permiten inducir a partir de una relación borrosa R en X dada por la función $R : X \times X \rightarrow [0,1]$ otra relación extendida entre subconjuntos borrosos, es decir aplicaciones de $\mathrm{F}(X) \times \mathrm{F}(X)$ en [0,1]. ([5, 6]).

Al aplicar estos métodos a la igualdad ordinaria, que se define sobre un referencial *X* como la relación

$$E(x,y)=\begin{cases}1 \text{ si } x=y\\ 0 \text{ si no}\end{cases} \tag{1}$$

se obtienen algunos índices y medidas bien conocidos en la literatura de subconjuntos borrosos, y que de este modo quedan englobados y reconocidos como variantes o extensiones de la igualdad. Nuestro propósito es estudiar primero las formas de pseudoigualdad obtenidas por agregación de los valores elementales. A continuación pasaremos a analizar formas indirectas, en que la igualdad se postula como una doble condición, ya sea ésta la desigualdad, la inclusión o la implicación. Finalmente partiremos de la agregación en torno a *E* para formular números borrosos que señalen un grado borroso de igualdad entre subconjuntos.

2. FORMAS OBTENIDAS POR AGREGACIÓN

De la correspondencia ordinaria entre elementos de una relación ordinaria cabe inducir diversas formas de correspondencia entre subconjuntos ordinarios. Una de ellas, la llamada correspondencia mínima, liga a dos subconjuntos *A* y *B* si existe algún elemento en *A* y *B* que están en correspondencia. Al desarrollar estas ideas en subconjuntos borrosos aparece (cf. [5]) una extensión de la relación borrosa *R*, que denominamos extensión por agregación. Dicha agregación se engendra mediante un par $t = [S,T]$ de operadores, que son respectivamente una conorma y una norma triangulares. La norma (resp. la conorma) es un operador T: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ asociativo, conmutativo, monótono en ambos argumentos y tal que $T(x,1)=x$ (resp. $S(x,0)=x$) para todo $x \in X$.

La extensión por agregación de *R* según el par $t=[S,T]$ se define entonces como la relación Rt dada por

$$Rt(A,B)=\mathop{\mathbf{S}}_{x,y\in X} T(R(x,y),A(x),B(y)) \tag{2}$$

donde $\mathbf{S}_{x,y\in X}$ representa la aplicación reiterada de la conorma *S* a los diversos términos que resultan al variar *x* e *y*. Al aplicar esta definición a *E* en el caso más común o canónico *t=[max,min]* se obtiene

$$E^*(A,B)=\sup_{x,y\in X}\min(E(x,y),A(x),B(y)) \tag{3}$$

$$=\sup_{x\in X}\min(A(x),B(x)) \tag{4}$$

Con parecido criterio se obtiene una agregación dual definiendo

$$E_*(A,B)=\inf_{x\in X}\max(A(x),B(x)) \tag{5}$$

Son muy diversos los índices y medidas que responden a los patrones establecidos en (4) y (5), y que por tanto resultarían ser extensiones por agregación de la igualdad *E*. Revisaremos los principales de entre ellos.

Indice de consistencia

El operador de comparación entre subconjuntos borrosos obtenido en (4) es introducido y discutido por ZADEH en su primer trabajo sobre conjuntos borrosos [14]. ZADEH lo denomina índice de consistencia entre dos subconjuntos borrosos *A* y *B*, y es fácil interpretarlo como el mayor grado de intersección entre ambos. Sin embargo, el estudio posterior se centra preferentemente en un índice de separabilidad *D* obtenido como contrario del anterior índice *C*

$$D = 1 - C = 1 - \sup_{x \in X} (A \cap B)(x)$$

Evidentemente *C* resulta ser la agregación de la igualdad dada en (1), mientras que *D* sería la agregación dual de la desigualdad E^c sobre los complementarios A^c, B^c. Por tanto

$$C = E^{*}(A,B) \qquad\qquad D = (E^{c})_{*}(A^{c}, B^{c}) \tag{6}$$

De este hecho ZADEH deriva el teorema de separabilidad de subconjuntos borrosos convexos y apunta la importancia de dicho índice en el problema de la discriminación o diferenciación de patrones. Es fácil suponer que algunos de estos resultados se mantienen al sustituir *E* por una relación binaria *R* con propiedades suficientemente fuertes.

No obstante, para ser una medida de igualdad este índice de consistencia E^* ofrece escasa información sobre el encaje de los subconjuntos, como prueba la siguiente proposición.

Proposición 1 *Siendo E la relación de igualdad en X se cumple*

i) $E^* (A,B) = 0 \iff A \cap B = \emptyset$

ii) $E^* (A,B) = a \neq 0 \implies A \cap B \neq \emptyset \qquad a \leq hgt(A) \qquad a \leq hgt(B)$

donde $hgt(M) = \sup_{x \in X} M(x)$ *representa la altura del subconjunto M.*

Demostración: En (i) el resultado es consecuencia inmediata de la expresión (4). En el caso (ii) como E^* $(A,B) \neq 0$ por (i) se deduce que $A \cap B \neq \emptyset$. Además como

$$a = \sup_x \min(A(x), B(x)) \leq \min\left(\sup_x A(x), \sup_x B(x)\right)$$

resulta que $a \leq \sup_x A(x)$ y $a \leq \sup_x B(x)$. ■

En el más alto grado de consistencia, es decir cuando $E^*(A,B)=1$, tan solo podemos asegurar que $\sup_X (AnB)(x)=1$, con lo que $hgt(A) = hgt(B) = 1$, y por tanto *A* y *B* son de los denominados subconjuntos normales. Cuando además *X* es finito existirá $x_0 \in X$ tal que $A(x_0)=B(x_0)=1$.

Pese a esta escasez de información, el cálculo del índice es sencillo ya que se puede formular como un producto escalar con operaciones max-min cuando *A* y *B* se expresan en forma vectorial. Si consideramos sobre el referencial $X=\{a,b,c,d\}$ los subconjuntos borrosos $A=\{0.3/a, 0.5/b, 1/c, 0/d\}$ y $B=\{0.4/a, 0.8/b, 0.7/c, 0.2d\}$ quedaría $C=E^*(A,B)=0.7$.

Medidas de posibilidad y necesidad

La misma formulación de pseudoigualdad dada en (3) se recoge, bajo la denominación de medida de posibilidad, en el trabajo inicial de ZADEH [16] y en la posterior monografía de DUBOIS y PRADE [4]. En su trabajo ZADEH trata de fijar el significado de la proposición \`*X* es *F*' por medio de un subconjunto borroso *F* asociado a una etiqueta lingüística tal como *alto, viejo* o *grande*. Esto le lleva a definir una semántica que se apoya desde el punto de vista matemático en la llamada lógica de la posibilidad.

Así, la distribución de posibilidad de una variable *X* describe el grado de concordancia de cada uno de los elementos del universo *U* con la proposición \`*X* es *F*' y se establece con una función de distribución *F*(*u*) que puede ser representada como un subconjunto borroso en *U*. Recordemos también que en dicha teoría para una distribución de posibilidad Π_X asociada a la variable *X*, se define la medida de posibilidad de un subconjunto borroso *A* de *U* como

$$\Pi(A)=\sup_{u\in U}\min\left(F(u),A(u)\right)$$

Desde nuestro enfoque actual dicha medida puede ser considerada como una extensión por agregación de la igualdad, como un grado de pseudoigualdad entre la función de distribución y el subconjunto dado *A*, es decir

$$\Pi(A)=E^*(F,A) \tag{7}$$

También la medida dual de necesidad introducida por DUBOIS-PRADE como $N(A)=1-\Pi(A^c)$, y que podemos reducir a

$$N(A)=\inf_{u\in U}\max\left(1-F(u),A(u)\right)$$

se podría expresar como una agregación canónica dual de las definidas en (5), y por tanto como una nueva extensión de la igualdad *E* dado que

$$N(A)=E_*\left(F^c,A\right) \tag{8}$$

Aprovechando este enfoque, cuestiones tan fundamentales como el segundo axioma de definición de las medidas de posibilidad, según el cual

$$\Pi(A\cup B)=\max\left(\Pi(A),\Pi(B)\right)$$

serían consecuencias inmediatas de las propiedades obtenidas para las extensiones por agregación. A tenor de dichos resultados, las medidas de posibilidad y necesidad podrían ser reinterpretadas con normas distintas de la canónica, ya que en tal caso los axiomas que definen estas medidas se preservan. En cierto modo, la extensión de igualdades presentada ampara y generaliza este tipo de medidas.

Comparador de subconjuntos

Otro tipo de medida parecida es empleado también por PRADE-TESTEMALE[13] en la construcción de un lenguaje de consulta para bases de datos relacionales con información imprecisa.

El problema que allí se plantea es la necesidad de extender a subconjuntos borrosos los comparadores numéricos elementales, entre ellos la igualdad.

Se entiende allí, que si los valores para cierto objeto *O* en los atributos *A* y *B* vienen dados a través de etiquetas lingüísticas por dos distribuciones *A*[*O*],*B*[*O*] sobre un dominio *D* común, representadas por subconjuntos borrosos, su medida de posibilidad de igualdad viene dada por

$$\Pi\left(A[O]|B[O]\right)=\sup_{d\in D}\min\left(A[O](d),B[O](d)\right)=E^{=}\left(A[O],B[O]\right) \tag{9}$$

donde $\Pi(A[O]|B[O])$ está construida a partir de la distribución de posibilidad asociada a la proposición `X es A[O]'. Dicha distribución tendría como función de distribución

$$\pi(d) = A[O](d)$$

y está representada por el borroso *A*[*O*]. Al aplicar esta medida de posibilidad $\Pi(A[O]$ al subconjunto *B*[*O*] se obtiene la expresión de $\Pi(A[O](B[O])$ que hemos denotado como $\Pi(A[O]|B[O])$.

A semejanza de la igualdad, los restantes comparadores (mayor, menor, etc.) también pueden ser contemplados como extensiones por agregación.

Medida de contraste

Al igual que en el caso de Prade-Testemale, se introduce en Zemankova-Kandel[17] una nueva variante de esta extensión bajo el formalismo de medida de posibilidad, a fin de contrastar valores en las operaciones de consulta sobre bases de datos relacionales borrosas. Sin embargo el formalismo empleado para comparar distribuciones de posibilidad, y en definitiva subconjuntos borrosos, utiliza el producto · en vez del mínimo como norma triangular, con lo que

$$\Pi(A)=\sup_{u\in U} F(u)\cdot A(u)$$

y por tanto

$$\Pi(A)=E^{t}(F,A) \qquad \text{para } t=[\max,\cdot]$$

Pero en este caso la medida de necesidad se complica, dado que el producto no es la norma dual de *max* respecto a la negación ordinaria dada por $A^c(x) = 1-A(x)$, es decir

$$\max(1-x,1-y) = 1-\min(x,y) \text{ para todo } x,y$$
$$\max(1-x,1-y) \neq 1-x\cdot y \text{ para algún } x,y$$

De la definición ordinaria resultaría

$$N(A)=1-\Pi(A^c)=1-\sup_{u\in U} F(u)\cdot(1-A(u))$$

que, a diferencia de (8),es una expresión poco operativa y de difícil interpretación. Por este motivo los autores se ven obligados a introducir una nueva medida, llamada de certidumbre, que definen como

$$C(A)=\max\left(0,\inf_{u\in U}\left(F(u)-A(u)\right)>0\right)$$

3. IGUALDAD COMO DOBLE CONDICIÓN

En la teoría ordinaria de conjuntos la igualdad puede ser reconstruida a partir de relaciones no simétricas. Podemos analizar si es útil como igualdad la relación entre subconjuntos que surge al combinar las extensiones de las dos relaciones asimétricas.

Un primer caso resulta al partir de un dominio *X* totalmente ordenado. Aquí la igualdad puede construirse a partir de dos desigualdades. Se trata de ver si la extensión por agregación de estas relaciones de orden es compatible con la extensión de la igualdad.

Existen otras dos posibilidades en que el uso de las extensiones no es explícito y que representarían nuevos enfoques para abordar la igualdad desde una óptica conjuntista. Una de ellas es plantear la igualdad entre subconjuntos haciendo uso de condiciones con operaciones conjuntistas tales como la diferencia simétrica. Finalmente puede obtenerse otras equivalencias entre subconjuntos dando nuevas interpretaciones a la inclusión de subconjuntos borrosos. En todo caso algunos de ellos son reducibles al ámbito de las relaciones extendidas.

Extensión de desigualdades

Si *X* es un conjunto dotado de un orden ≤ podemos definir las relaciones binarias *L* y *G* en la forma

$$L(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x \le y\\ 0 & \text{si no}\end{cases} \qquad G(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x \ge y\\ 0 & \text{si no}\end{cases} \tag{10}$$

A partir de éstas se pueden construir por agregación según (2) *L** y *G**, que resultan

$$L^*(A,B)=\sup_{x,y}\min\big(L(x,y),A(x),B(y)\big)=\sup_{x\le y}\min\big(A(x),B(y)\big)$$

$$G^*(A,B)=\sup_{x,y}\min\big(G(x,y),A(x),B(y)\big)=\sup_{x\ge y}\min\big(A(x),B(y)\big)$$

Sabemos, por ser ≤ orden, que la relación $L\cap G$ coincide con *E*. Si aplicamos a dichas relaciones las propiedades de las extensiones obtenidas por agregación, tendremos

$$E^*=(L\cap G)^*\not\subseteq L^*\cap G^*$$

La segunda de las relaciones anteriores nos permite ofrecer como nuevo índice de igualdad $M(A,B)=(L^*\cap G^*)(A,B)$, esto es

$$M(A,B)=\min\left(\sup_{x\le y}\min\big(A(x),B(y)\big),\ \sup_{x\ge y}\min\big(A(x),B(y)\big)\right) \tag{11}$$

Aunque por la desigualdad anterior su fiabilidad como grado de encaje entre subconjuntos borrosos es menor que la de E^*, se ha empleado como tal en la teoría de control.

Una generalización de este método puede obtenerse si en vez de *L* y *G* definimos a partir del orden una familia de relaciones

$$D_{\varepsilon}(x,y)=\begin{cases}\varepsilon & \text{si } x\leq y\\ 1-\varepsilon, & \text{si no}\end{cases} \tag{12}$$

La extensión en este caso sería

$$D_{\varepsilon}^{*}(A,B)=\sup_{x,y}\min\left(D_{\varepsilon}(x,y),A(x),B(y)\right) \tag{13}$$

$$=\max\left(\sup_{\substack{x,y\\ x\leq y}}\min\left(\varepsilon,A(x),B(y)\right),\ \sup_{\substack{x,y\\ x>y}}\min\left(1-\varepsilon,A(x),B(y)\right)\right) \tag{14}$$

Puesto que en (11) la relación *M* se ha obtenido como intersección de las extensiones, una forma de construir una nueva aproximación de la igualdad sería calculando

$$H(A,B)=\inf_{\varepsilon\in[0,1]}D_{\varepsilon}^{*}(A,B) \tag{15}$$

Por la construcción *H* mejoraría a *M* como índice de igualdad.

Construcciones con diferencia simétrica

En ocasiones en vez de recurrir a medidas de semejanza puede ser útil emplear medidas que reflejen la separación de los objetos. Teniendo en cuenta que la primera expresión de pseudoigualdad en (4) se ha obtenido agregando los valores de una intersección de subconjuntos, una medida de la separación o desigualdad se puede obtener agregando los valores de la diferencia simétrica de subconjuntos

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$

No olvidemos que en la teoría de conjuntos ordinarios ambos subconjuntos se relacionan mediante las igualdades

$$(A\cap B)\cup(A\,\Delta\,B)=A\cup B \qquad\qquad (A\cap B)\cap(A\Delta B)=\emptyset$$

es decir que son complementarios respecto a la unión $A\cup B$. Pero como la introducción de la complementariedad abre paso a múltiples interpretaciones en conjuntos borrosos, existen al menos dos interpretaciones posibles para la diferencia simétrica [3]. Los distintos criterios resultan al tratar de interpretar el operador diferencia ordinario.

En una primera interpretación del operador se consideran los elementos que pertenecen más a *A* que a *B* o viceversa y se evalúa esa diferencia, resultando

$$(A\Delta B)(x)=\max\left(A(x)-B(x),\,B(x)-A(x)\right)=|A(x)-B(x)| \tag{16}$$

La agregación de valores de este conjunto daría

$$\sup_{x}(A\Delta B)(x)=\sup_{x}\left|A(x)-B(x)\right| \tag{17}$$

que constituye la métrica uniforme. A su vez en la relación contraria a la anterior 1–$\sup_x (A\Delta B)(x)$, que representa por inversión una pseudoigualdad, tenemos una proximidad, ya que se cumplen las propiedades reflexiva y simétrica. Esta relación quedaría entonces definida por

$$E_1(A,B) = 1 - \sup_x \left| A(x) - B(x) \right| \tag{18}$$

Basados en este hecho Prade-Testemale [13] lo emplean, con ayuda de un nivel o umbral α, como instrumento para determinar la semejanza de dos distribuciones de posibilidad π,π' sobre un dominio D, declarando ambas ε-similares cuando $\varepsilon = 1 - \alpha$ y

$$1 - \sup_x \left| \pi(x) - \pi'(x) \right| \geq \alpha$$

o bien

$$\sup_x \left| \pi(x) - \pi'(x) \right| \leq \varepsilon$$

lo que viene a representar una generalización a subconjuntos de la métrica euclídea.

La segunda de las interpretaciones del operador diferencia es de naturaleza conjuntista. En ella se describe A–B como $A \cap B^c$ con lo que la diferencia simétrica resultaría

$$(A\Delta B)(x) = \max(\min(A(x), 1 - B(x)), \min(B(x), 1 - A(x))) \tag{19}$$

De la agregación resulta un índice de separación, y su contrario reflejaría un índice de cercanía o pseudoigualdad

$$\begin{aligned} E_2(A,B) &= 1 - \sup_x (A\Delta B)(x) \\ &= 1 - \sup_x \max\left(\min(A(x), 1 - B(x)), \min(B(x), 1 - A(x))\right) \\ &= \inf_x \min\left(\max(1 - A(x), B(x)), \max(1 - B(x), A(x))\right) \end{aligned}$$

Al desarrollar este último término obtenemos como expresión final de esta pseudoigualdad

$$E_2(A,B) = \min\left(\inf_x \max(1 - A(x), B(x)), \inf_x \max(1 - B(x), A(x))\right) \tag{20}$$

Este índice, pese a ser utilizado como instrumento para valorar el encaje entre subconjuntos (cf. Pedrycz [11]), no da lugar a una relación reflexiva, y por tanto no es una relación de proximidad. Esta circunstancia impide que podamos construir a partir de él similaridades, es decir relaciones borrosas de equivalencia, y lo convierte en un instrumento poco operativo para la comparación de subconjuntos.

Equivalencias en doble implicación

Otro enfoque paralelo al anterior se puede obtener mediante operadores lógicos. Para ello relacionaremos la igualdad entre subconjuntos con la equivalencia lógica.

Antes de dotar al cálculo de proposiciones de la semántica común se introduce la equivalencia de proposiciones de modo que $a \leftrightarrow b$ si y solo si $(a \leftarrow b) \Lambda (a \rightarrow b)$. La construcción de la equivalencia puede expresarse en el caso de subconjuntos por medio de la doble inclusión.

En la versión más común de la lógica borrosa los operadores *max, min*, 1– se asocian a las conectivas lógicas V, Λ, ¬, y a las operaciones conjuntistas ∪, ∩, ^{c}. El caso de la implicación es más complejo. Uno de los puntos de partida consiste en asociar la implicación → a la inclusión conjuntista borrosa por medio de la expresión de BANDLER-KOHOUT

$$In(A,B) = \inf_{x \in X} \left(A(x) \rightarrow B(x)\right) \tag{21}$$

donde *In*(*A,B*) refleja el grado en que *A* está incluido en *B*. Esta expresión conduce a una formulación de la equivalencia de subconjuntos en que

$$Eq(A,B) = \min\left(\inf_{x \in X}\left(A(x) \rightarrow B(x)\right), \inf_{x \in X}\left(B(x) \rightarrow A(x)\right)\right) \tag{22}$$

$$= \inf_{x \in X} \min\left(A(x) \rightarrow B(x), B(x) \rightarrow A(x)\right) \tag{23}$$

Esta expresión que puede expresar el grado de igualdad por equivalencia lógica tomará diversas formas según sea el operador de implicación → elegido. En los trabajos de BANDLER-KOHOUT [1] así como en el más reciente de KERRE [7] podemos encontrar un completo catálogo de variantes. Vamos a ver que algunos enfoques ya considerados en otros apartados resultan concurrentes con algunas de ellas.

En particular, si consideramos el operador implicación de Lukasiewicz

$$I_1(a,b) = \min(1,1-a+b) \tag{24}$$

y lo llevamos a la expresión (22) resulta

Proposición 2 *La equivalencia de subconjuntos borrosos Eq_1 construida a partir de la implicación de Lukasiewicz coincide con E_1*

Demostración: Al sustituir en (22), como $1–A(x)+B(x)$ y $1–B(x)+A(x)$ no pueden ser ambos mayores que 1, queda

$$Eq_1(A,B) = \inf_{x \in X} \min\left(1, 1-A(x)+B(x), 1-B(x)+A(x)\right)$$

$$= \inf_{x \in X} \min\left(1-A(x)+B(x), 1-B(x)+A(x)\right)$$

$$= \inf_{x \in X} 1-\max\left(A(x)-B(x), B(x)-A(x)\right)$$

$$= \sup \max\left(A(x)-B(x), B(x)-A(x)\right)$$

$$= \sup_{x \in X} \max\left(A(x)-B(x), B(x)-A(x)\right) = E_1(A,B)$$

■

También es inmediato ver que la relación E_2 se obtiene al introducir la implicación Kleene-Dienes, definida como

$$I_2(a,b) = \max(1-a,b) \tag{25}$$

Proposición 3 *La equivalencia de subconjuntos borrosos* Eq_2 *construida a partir del operador Kleene-Dienes coincide con* E_2

Son las propias limitaciones del operador I_2, que no cumple la tautología $a \rightarrow a$, las que determinan que la relación E_2, tal y como ya habíamos señalado, no sea reflexiva.

Quizá sea interesante finalizar este apartado con las equivalencias que surgen de otras dos implicaciones convencionales: la implicación Gödel-Brouwer y la de Gaines, que definimos respectivamente como

$$I_3(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \le b \\ b & \text{si no} \end{cases} \tag{26}$$

$$I_4(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ \min\left(1, \dfrac{b}{a}\right) & \text{si no} \end{cases} \tag{27}$$

Proposición 4 *Para los operadores implicación* I_3 *e* I_4 *arriba definidos, si consideramos el conjunto* $T = \{x \in X \mid A(x) \neq B(x)\}$*, se obtienen las equivalencias de subconjuntos borrosos*

$$Eq_3(A,B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A(x) = B(x)\ \forall x \in X \\ \inf_{x \in T} \min(A(x), B(x)) & \text{si no} \end{cases}$$

$$Eq_4(A,B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A(x) = B(x)\ \forall x \in X \\ \inf_{x \in X} \min\left(\dfrac{A(x)}{B(x)}, \dfrac{B(x)}{A(x)}\right) & \text{si no} \end{cases}$$

Demostración: Para obtener la equivalencia correspondiente a I_3 consideremos un elemento $x \in T$ cuando $A(x) < B(x)$

$$\min((A(x) \rightarrow (B(x)), (B(x) \rightarrow (A(x))) = \min(1, A(x)) = A(x) = \min(A(x), B(x))$$

y cuando $B(x) < A(x)$

$$\min((A(x) \rightarrow B(x)), (B(x) \rightarrow A(x))) = \min(B(x), 1) = B(x) = \min(A(x), B(x))$$

Además cuando $A(x) = B(x)$

$$\min((A(x) \rightarrow B(x)), (B(x) \rightarrow A(x))) = \min(1,1) = 1$$

Por tanto al sustituir en la expresión (22) queda

$$Eq_4(A,B)=\min\left(1,\inf_{x\in T}\min(A(x),B(x))\right)=\inf_{x\in T}\min(A(x),B(x))$$

En el caso de que se tenga $A(x) = B(x)$ para todo $x \in X$ se tendría

$$Eq_4(A,B)=\inf_{x\in X}1=1$$

De forma semejante podemos deducir la expresión de Eq_4 a partir de el operador implicación I_4. ■

La equivalencia Eq_3, engendrada por la implicación brouweriana queda próxima a otra variante de agregación de la igualdad, que podría establecerse como

$$E^\wedge(A,B)=\inf_{x\in X}\min(A(x),B(x)) \tag{28}$$

Sin embargo, la aplicación de esta pseudoigualdad puede llegar a dar interpretaciones incoherentes. Basta ver que, por definición, si a es un elemento de X

$$E^\wedge(\{a\},\{a\})=\inf_{x\in X}\min(\{a\}(x),\{a\}(x))=0$$

Pero para estos subconjuntos resulta $Eq_3(\{a\}, \{a\}) = 1$. Así que la relación Eq_3, que ahora hemos obtenido, evita algunos de los problemas que en ella plantean.

Proposición 5 *Para las relaciones Eq_3 y $E^\wedge$ definidas anteriormente se verifica*

i) $E^\wedge \subseteq Eq_3$

ii) El valor de ambas pseudoigualdades coincide para subconjuntos borrosos A, B subconjuntos borrosos tales que $A(x) \neq B(x)$ para todo $x \in X$

Demostración: i) Para dos subconjuntos borrosos A, B cualesquiera, haciendo $T = \{x \in X \mid A(x) \neq B(x)\}$ tenemos que

$$E^\wedge(A,B)=\min\left(\inf_{x\in T}\min(A(x),B(x)),\inf_{x\notin T}\min(A(x),B(x))\right)$$

$$\leq\inf_{x\in T}\min(A(x),B(x))=Eq_3(A,B)$$

ii) Para dichos subconjuntos borrosos se tiene que $T = X$ entonces $\inf_{x\in X}\min(A(x), B(x)) = \inf_{x\in T}\min(A(x), B(x))$ con lo que resulta la igualdad. ■

4. IGUALDADES OBTENIDAS POR NIVELACION

Por último, vamos aplicar a la relación de igualdad E otro tipo de extensiones que permiten obtener pseudoigualdades. La primera de ellas se basa en las relaciones ordinarias que para una relación borrosa se obtienen al aplicar cortes de nivel. Para R relación borrosa en X se obtienen como cortes de nivel las relaciones

$$R_\alpha = \{(x,y) \mid R(x,y) \ge \alpha\}$$

A partir de este tipo de relaciones ordinarias se formaban en [6] las llamadas relaciones extendidas a nivel óptimo. Para una relación binaria borrosa la relación extendida se formaba definiendo

$$R^{\circ}(A,B) = \sup\{\alpha \mid A \subseteq R_\alpha \circ B,\ B \subseteq A \circ R_\alpha\}$$

donde $\subseteq$, $\circ$ representan respectivamente la inclusión y la composición borrosas, de donde

$$R^{\circ}(A,B) = \sup\left[\alpha \;\middle|\; A(x) \le \sup_y \min(R_\alpha(x,y), B(y)) \quad \forall x \in X,\ B(y) \le \sup_x \min(A(x), R_\alpha(x,y)) \quad \forall y \in X\right]$$

En el caso de E los cortes de nivel resultan triviales ya que, por la construcción, para $\alpha \ne 0$ se tiene que $E = E_\alpha$. Al introducir E en la expresión resulta

$$E^{\circ}(A,B) = \sup\{\alpha \mid A \subseteq E_\alpha \circ B,\quad B \subseteq A \circ E_\alpha\}$$

Como las condiciones finales son $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ cuando $\alpha > 0$, tendríamos

$$E^{\circ}(A,B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A = B \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \tag{29}$$

Esta formulación representa la igualdad de subconjuntos borrosos clásica utilizada inicialmente por Zadeh, pero de escasa utilidad como igualdad atenuada.

Pseudoigualdad como número borroso

En esta última propuesta pretendemos construir para dos subconjuntos un grado borroso de igualdad. No se trata de dar con un valor concreto en [0,1] sino con un subconjunto borroso de [0,1]. En el método que presentamos intervienen las relaciones obtenidas mediante cortes de nivel y las agregaciones canónicas, de tal modo que tomaremos como punto de partida para la extensión de una relación R la expresión

$$\tilde{R}^{\circ}(A,B)(r) = \sup\{\alpha \in [0,1] \mid R^{\circ}(A_\alpha, B_\alpha) \ge r\} \tag{30}$$

que reflejaría el grado de certeza con que la pseudoigualdad entre A y B tiene el valor R. En el caso de la igualdad esta expresión se convertiría

$$\tilde{E}^{\circ}(A,B)(r) = \sup\{\alpha \in [0,1] \mid E^{\circ}(A_\alpha, B_\alpha) \ge r\} \tag{31}$$

Podemos obtener ciertas caracterizaciones cuando la relación R es reflexiva, esto es cuando $R(x,x) = 1$ para todo $x \in X$,

Proposición 6 *Sean A,B subconjuntos borrosos de X y R una relación borrosa reflexiva, para todo* $\alpha \in [0,1]$ *si* $R^*(A_\alpha, B_\alpha) = 0$ *entonces* $A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$.

Demostración: Como A_α y B_α son subconjuntos ordinarios, tenemos por definición que

$$R^*(A_\alpha, B_\alpha) = \sup_{x,y \in X} \{R(x,y) | x \in A_\alpha, \ \ y \in B_\alpha\}$$

Al ser nulo este valor, $R(x,y) = 0$ para todo $x \in A_\alpha$, $y \in B_\alpha$. Si entonces fuera $A_\alpha \cap B_\alpha \neq \emptyset$ existiría un elemento $a \in A_\alpha \cap B_\alpha$, tal que $R(a,a) = 0$. Lo que es absurdo, dado que R es reflexiva. ■

Proposición 7 *Sean A,B subconjuntos borrosos de X y E la relación de igualdad, para todo* $\alpha \in [0,1]$ *se tiene que*

$$E^*(A_\alpha, B_\alpha) = 0 \qquad \textit{si y solo s} \qquad A_\alpha \cap B_\alpha = E^*$$

Demostración: La suficiencia es consecuencia de la proposición anterior. Para demostrar la necesidad supongamos que $E^*(A_\alpha, B_\alpha) \neq 0$. Como E, A_α y B_α son subconjuntos ordinarios el valor solo puede ser 0 ó 1. De modo que la suposición se convierte en

$$1 = \sup_x \min\left(A_\alpha(x), B_\alpha(x)\right) = \sup_x \left(A_\alpha \cap B_\alpha\right)(x)$$

Por tanto existe algún $x \in A_\alpha \cap B_\alpha$, y $A_\alpha \cap B_\alpha \neq \emptyset$. ■

Este resultado simplifica considerablemente en el caso de la igualdad la construcción propuesta en (30). En efecto de la proposición anterior y de la expresión (31) cabe deducir para $r>0$

$$\tilde{E}^*(A,B)(r) = \sup\left\{\alpha \in [0,1] \middle| E^*(A_\alpha, B_\alpha) \geq r\right\} \tag{32}$$

$$= \sup\left\{\alpha \in [0,1] \middle| E^*(A_\alpha, B_\alpha) = 1\right\} \tag{33}$$

$$= \sup\left\{\alpha \in [0,1] \middle| (A_\alpha \cap B_\alpha) \neq \emptyset\right\} \tag{34}$$

En realidad el método planteado degenera en un número borroso singular, que sólo toma dos valores $\tilde{E}^*(A,B)(1)$ y $\tilde{E}^*(A,B)(0)$. Al interpretarlo resulta que la certeza en torno a un grado de igualdad no nulo (*r>0)* para los subconjuntos *A* y *B* resulta ser

$$\sup\{\alpha \in [0,1] \ (A_\alpha \cap B_\alpha) \neq \emptyset\}$$

Esta expresión coincide con la definición introducida por Buckles [2] para fijar el grado de semejanza entre dos números borrosos en su modelo de bases de datos borrosas.

BIBLIOGRAFIA

1. W. BANDLER, L. KOHOUT, Fuzzy power sets and fuzzy implication operators, Fuzzy Sets and Systems 4 (1980) 13-30.
2. B.P. BUCKLES, F.E. PETRY, Extending the fuzzy database with fuzzy numbers, Information Sciences 34 (1984) 145-155.
3. D. DUBOIS, H. PRADE, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, Orlando, 1980.
4. D. DUBOIS, H. PRADE, Possibility Theory, Plenum Press, New York, 1988.
5. L. GONZALEZ, A. MARIN, Extending fuzzy relations, Fuzzy sets and systems 69 (1995) 157-169.
6. L. GONZALEZ, A. MARIN, Optimum level extension of relations, en Procs. of FUBEST'94, Sofia (Bulgaria), 89-91.
7. E.E. KERRE, A comparative study of the behaviour of some popular fuzzy implication operators on the generalized modus ponens, en Fuzzy Logic for the Management of Uncertainty (Zadeh L.A., Kacprzyk J. eds, J. Wiley, New York, 1992) 281-295.
8. J.L. KELLEY, General Topology, (Van Nostrand,1955).
9. F. KLAWONN, R. KRUSE, Equality relations as a basis for fuzzy control, Fuzzy Sets and Systems 54 (1993) 147-156.
10. N.N. MORSI, Hyperspace fuzzy binary relations, Fuzzy Sets and Systems 67 (1994) 221-237.
11. PEDRYCZ W., Fuzzy control and fuzzy systems, Second Ed., J. Wiley, Taunton Eng, 1993.
12. J. FODOR, M. ROUBENS, Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support, Kluwer Ac. Pub., Dordrecht, 1994.
13. H. PRADE, C. TESTEMALE, Generalizing Database Relational Algebra for Treatment of Incomplete or Uncertain Information and Vague Queries, Information Sciences 34 (1984) 115-143.
14. L.A. ZADEH, Fuzzy Sets, Information and Control 8 (1965) 338-353.
15. L.A. ZADEH, Similarity relations and fuzzy orderings, Information Sciences 3 (1971) 177-200.
16. L.A. ZADEH, Fuzzy Sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978) 3-28.
17. M. ZEMANKOVA, A. KANDEL, Fuzzy relational databases - a key to expert systems, Verlag TUV Rheinland, Koln, 1984.