Historia de la Gravedad Cuántica

(History of Quantum Gravity)

Pérez Sebastián, Miguel A.
Univ. del País Vasco
Dpto. de Física Teórica e Historia de la Ciencia
Apartado 644
48080 Bilbao

BIBLID [1137-4411 (1997), 4; 235-252]

En este trabajo proponemos un recorrido histórico a través de los diversos intentos de describir la gravedad por medio de una teoría cuántica, que han tenido lugar durante los últimos 60 años. Aunque ninguno de estos intentos ha logrado este propósito de manera completamente satisfactoria, aún hoy los físicos continúan trabajando en algunas de las líneas de investigación que vamos a exponer. Nos referiremos brevemente a los primeros intentos, que datan de los años 30, continuaremos con la denominada teoría semiclásica, la teoría canónica y el método de las integrales de camino. Asimismo trataremos ciertos aspectos de la cosmología cuántica y otras teorías surgidas recientemente con el ánimo de completar la descripción de la gravedad.

Palabras Clave: Historia de la ciencia. Gravedad. Teoría cuántica. Relatividad general.

Gure lan honetan aken 60 urteetan agertu diren grabitatea teoria kuantikoaren bidez deskribatzeko saiakeren zeharreko ibilbide historikoa proposatu nahi dugu. Aipatutako saiakerak guztiz asebetegarriak izan ez ba dira ere, gaur egun ere zenbait fisikarik azalduko ditugun ikerketa-arloetan lanean jarraitzen du. Hasieran 30. hamarkadan izan ziren lehenengo entseiuetaz arituko gara laburki, gero teoria semiklasiko, teoria kanoniko eta ibilbide integralen metodaz mintzatuko gara. Halaber, kosmologia kuantikoaren zenbait aspektutaz eta grabitatea deskribatzeko asmoz agertutako beste zenbait teoriataz ihardungo dugu.

Giltz Hitzak: Zientziaren historia. Grabitatea. Teoria kuantikoa. Erlatibitate orokorra.

Dans ce travail nous proposons un parcours historique a travers les divers essais de décrire la gravitation au moyen d'une théorie quantique qui ont eu lieu pendant les derniers 60 ans. Quoique aucun de ces essais n'aie abouti de façon complètement satisfaisant, même aujourd'hui les physiciens continuent a travailler dans quelques des lignes de recherche que nous allons exposer. Nous allons mentionner les premiers essais, qui datent des années 30, et après nous étudierons la théorie semiclassique, la théorie canonique et la méthode des integrals de chemin. De même, nous allons étudier certains aspects de la cosmologie quantique et autres théories proposées récemment dans l'intention de achever la description de la gravitation.

Mots Cles: Histoire de la science. Gravité. Théorie quantique. Relativité générale.

1. INTRODUCCION

La gravedad es una de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza. Una característica importante que la distingue de las demás interacciones es que afecta a toda forma de materia y energía de la naturaleza. Más aún, actúa con la misma intensidad sobre todas las formas de materia y energía. Incluso la luz siente su efecto: se ha observado que su trayectoria es desviada en los alrededores de un cuerpo muy masivo. Nada escapa a su alcance y, a pesar de ser la interacción fundamental más débil de la naturaleza, es la fuerza dominante a grandes distancias.

La teoría que hasta el momento mejor explica el comportamiento de los cuerpos bajo la interacción gravitatoria es la relatividad general de Einstein.

La relatividad general recoge esa propiedad del campo gravitatorio: todos los cuerpos caen del mismo modo bajo la acción de la gravedad independientemente de su naturaleza. Localmente el campo gravitatorio es indistinguible de un sistema con aceleración constante. Esto condujo a A. Einstein a la idea de que el campo gravitatorio puede ser descrito geométricamente a través de la estructura del espacio-tiempo. Nuestra comprensión de la gravedad identifica las ecuaciones del campo gravitatorio con las ecuaciones geométricas para el espacio y el tiempo.

Bajo ciertas condiciones generales acerca de la materia puede demostrarse la existencia de singularidades en el tiempo, o en el pasado o en el futuro. Esto está demostrado con rigor matemático en los famosos teoremas de singularidad de R. Penrose y S.W. Hawking. Observaciones como las reflejadas por el fondo cósmico de microondas indican que el universo tiene la suficiente materia como para haber producido una singularidad, de acuerdo con los teoremas, en el pasado que podría interpretarse como el comienzo del mismo. El rango de energías de los procesos físicos que tuvieron lugar en los momentos cercanos posteriores al comienzo del universo *(big bang)* están por encima del rango de validez de la teoría clásica de la relatividad general. Normalmente cuando se llegan a energías tan elevadas la intuición física induce a considerar la teoría cuántica de la interacción. Esto ocurre en todas las interacciones conocidas. Por eso el universo en sus primeros momentos debería ser descrito a través de una teoría cuántica de la gravedad donde la relatividad general pueda aparecer como el límite clásico de esta teoría.

Los intentos de describir la gravedad mediante una teoría cuántica han sido numerosos. Los primeros tuvieron lugar en los años 30, cuando los postulados y objetivos de la mecánica cuántica estaban muy recientes. Aún hoy, más de medio siglo después no existe una teoría cuántica de la gravedad.

En este artículo proponemos una descripción histórica de los diferentes modelos cuánticos para la gravedad que han aparecido a lo largo de estos últimos 65 años.

En la siguiente sección exponemos los primeros intentos de construir la teoría cuántica de la gravedad. En la tercera sección describiremos el comportamiento *semiclásico* de la gravedad, que trata sobre el comportamiento de otros campos cuánticos bajo el efecto del campo gravitatorio clásico. La cuarta sección está dedicada al formalismo canónico. En la quinta sección describiremos el método de las integrales de camino aplicado al campo gravitatorio y en la siguiente comentaremos las diferentes prescripciones utilizadas para desarrollar una cosmología cuántica. Por último hablaremos de otros modelos importantes que existen actualmente.

2. PRIMEROS INTENTOS DE CUANTIZAR [1] LA GRAVEDAD

La idea más difundida entre la comunidad científica es que todas las interacciones fundamentales deben ser descritas por una teoría cuántica de campos.

Hoy en día tres de las cuatro interacciones fundamentales (interacción electromagnética, interacción fuerte e interacción débil) vienen descritas por un modelo cuántico que las engloba. Este modelo se llama *modelo standard* y fue presentado por S.L. Glashow, S. Weinberg y A. Salam a principios de los 70. La teoría unificada de la interacción electromagnética y la interacción débil fue descrita por S. Weinberg y A. Salam[2] ; la interacción fuerte descrita por la teoría de la *quantum chromodynamics* (cromodinámica cuántica) se debe a H. Georgi y S.L. Glashow[3]. La única interacción que se resiste a ser descrita en una teoría unificada completa es la gravedad.

Los primeros intentos de construir una teoría cuántica para el campo gravitatorio fueron presentados entre 1930 y 1932 en dos artículos debidos a L. Rosenfeld[4]. Curiosamente son anteriores a los primeros intentos de cuantizar el campo electromagnético debidos también a L. Rosenfeld junto con N. Bohr[5].

Por otro lado, en 1932 E. Schrödinger[6] [6] estudió los efectos de la gravedad sobre campos cuánticos. Fue el primer intento de hacer una teoría semiclásica de la gravedad como ya se conocía, a falta de una teoría cuántica completa, para la interacción electromagnética. El objeto de estudio en un modelo semiclásico es el efecto que produce un campo externo clásico, que no será objeto de cuantización, (electromagnetismo o gravedad) sobre otros campos cuánticos de materia como por ejemplo campos escalares (de espín[7] cero) o campos de Dirac (de espín semientero).

Además W. Pauli y M.E. Fierz[8] establecieron que el espín del cuanto de gravedad (gravitón) debía ser igual a 2.

Después de la segunda guerra mundial comenzaron a tener lugar intentos más serios de conseguir una teoría cuántica completa de la gravedad, intentos que vamos a describir en los siguientes apartados.

---

1. El verbo *cuantizar* proviene del inglés *to quantize*. Se refiere a realizar el paso de una teoría clásica a una teoría de los *cuanta*. Algunos autores utilizan *cuantificar* pero no está aceptado entre la comunidad científica como traducción adecuada.

2. Ver Weinberg, S. (1967); Salam, A. (1968)

3. Ver Georgi, H., Glashow, S.L. (1974).

4. Ver Rosenfeld, L. (1930, 1932).

5. Ver Bohr, N., Rosenfeld, L. (1933).

6. Ver Schrödinger, E. (1932).

7. El espín es el momento cinético intrínseco de una partícula, no ligado a su movimiento. En la mecánica cuántica fue introducido por W. Pauli en 1927.

8. Ver Pauli, W., Fierz, M.E. (1939).

3. TEORIA SEMICLASICA DE LA GRAVEDAD

En este formalismo el campo gravitatorio es considerado como un campo externo clásico sobre el que se sustentan los demás campos cuánticos. También se utilizan perturbaciones del propio campo gravitatorio como campo cuántico, pero la geometría que sirve de base para los campos de materia no es objeto de cuantización. La descripción de la gravedad como campo clásico viene dada por la teoría de la relatividad general de A. Einstein.

Para hacer una teoría semiclásica debemos desarrollar el campo en pequeñas perturbaciones sobre la geometría plana e intentar cuantizar al estilo de la teoría de perturbaciones conocida para la *quantum electrodynamics* (electrodinámica cuántica). Para ello es necesario identificar la constante de acoplo entre el campo gravitatorio y los demás campos de materia. Así, combinando las constantes fundamentales que aparecen en la teoría: la constante de gravitación universal *G*, la constante de Plank , y la velocidad de la luz *c,* obtenemos una unidad fundamental de longitud: la longitud de Plank y una unidad de tiempo: el tiempo de Plank . Estas unidades fundamentales marcan la frontera a partir de la cual los efectos cuánticos son importantes. Si los procesos estudiados involucran escalas de longitud o de tiempo de ese orden de magnitud no será válida una teoría perturbativa de la gravedad cuántica debido a que el concepto de expansión en pequeñas perturbaciones se rompe. En estos casos debe utilizarse una teoría completa de gravedad cuántica. Para escalas de longitud o de tiempo mucho mayores que estos valores los efectos cuánticos de la gravedad son despreciables.

Hay un problema bastante grave en este procedimiento. De acuerdo con el principio de equivalencia todas las formas de materia y energía se acoplan con la misma intensidad a la gravedad, incluída la energía gravitatoria. En el lenguaje cuántico, los gravitones se acoplan con la misma intensidad a la gravedad que los fotones, de modo que si esperamos efectos importantes para fotones, lo mismo debemos esperar para gravitones. Esta no linealidad básica de la gravedad frustra todos los intentos de ignorar la gravedad cuántica a todos los niveles de perturbación. Otro indicativo de este problema esencial es que al contrario que en la electrodinámica cuántica, el parámetro que aparece como constante de acoplo, el cuadrado de la longitud de Planck, tiene dimensiones, lo que causa la aparición de infinitos en la teoría. La gravedad produce teorías no *renormalizables* [9]. A pesar de todo ello es posible proceder en el lenguaje semiclásico siempre que no olvidemos estos problemas.

En este formalismo perturbativo la métrica[10] del espacio-tiempo se descompone en una parte que hace de sustento geométrico (métrica plana) y un campo cuántico de espín 2 que representa perturbaciones lineales de la métrica del espacio-tiempo. En las ecuaciones de Einstein[11] se toma esta perturbación lineal en el término correspondiente al tensor energía-momento, junto con todos los demás campos cuánticos de materia.

---

9. Las teorías cuánticas pueden ser descritas a través de teorías perturbativas donde aparecen cantidades infinitas. Estas teorías pueden *re-normalizarse* para eliminar los infinitos de los parámetros de la teoría, pero no todas las teorías cuánticas son renormalizables.

10. La métrica es un tensor que lleva la noción de distancia entre dos eventos. El campo gravitatorio viene descrito por las componentes de la métrica.

11. Ecuaciones dinámicas del campo gravitatorio y de los campos de materia en relatividad general.

B.S. DeWitt[12] utilizó esta descomposición como punto de partida de un método llamado *background field* en el que derivó los diagramas de Feynman[13] desarrollando la acción de Einstein-Hilbert y de los campos de materia en potencias de las perturbaciones del campo gravitatorio frente a la métrica que hace de sustento geométrico. Como la teoría no es renormalizable normalmente se trunca la expansión a 2 *loops* (lazos)[14] para gravedad pura y a 1 *loop* en gravedad y materia acopladas. A este nivel se pueden tratar las divergencias que aparecen en la teoría[15].

Después de los trabajos de E. Schrödinger ya comentados surgieron trabajos que intentaron cuantizar la gravedad pero la investigación directa de los efectos cuánticos en geometrías curvas comenzó con las investigaciones de L. Parker a finales de los años 60 continuadas por Ya.B. Zel'dovich et al., por S.A. Fulling[16], etc. Estas primeras investigaciones trataron sobre las consecuencias cosmológicas de efectos cuánticos como por ejemplo la creación de partículas producida por la expansión del universo. Utilizaron técnicas sofisticadas desarrolladas en los años 70 para estudiar el tensor energía-momento de campos cuánticos de materia. Este tensor es importante por dos razones: por un lado se utiliza para calcular la dinámica de la expansión del universo producida por los efectos cuánticos sobre la geometría, lo que se conoce como *back reaction*. Citaremos por ejemplo los trabajos de M.V. Fischetti, J.B. Hartle y B.L. Hu[17], etc. Por otro lado da casi toda la información sobre la situación física del sistema.

Durante la primera mitad de los años 70 hubo una gran cantidad de investigaciones relacionadas con la teoría cuántica de campos en espacios curvos. Pero el impulso importante en este campo vino tras el descubrimiento por parte de S.W. Hawking[18] en 1975 de que los agujeros negros radían como cuerpos negros debido a la creación de partículas en las inmediaciones de su horizonte. Casi simultáneamente J.D. Bekenstein[19] propuso una segunda ley de la termodinámica para los agujeros negros, definiendo la entropía gravitatoria en el horizonte del agujero negro como una cantidad proporcional a su superficie. Otro resultado importante en este formalismo es el efecto Unruh, descubierto por W.G. Unruh[20] en 1976. Estudió el comportamiento de distintos observadores y descubrió que un observador acelerado, incluso en el espacio plano, detectará partículas en el estado vacío de un campo cuántico cualquiera.

Las investigaciones relacionadas con el efecto Hawking permanecen activas actualmente tanto en gravedad 2+1 (dos dimensiones espaciales y una temporal) como en la teoría general, igual que los efectos relacionados con la creación de partículas cerca de la singularidad inicial del universo[21].

---

12. Ver DeWitt, B.S. (1967a).

13. Diagramas que representan el desarrollo perturbativo de la teoría.

14. Corresponde al segundo orden del desarrollo perturbativo de la teoría.

15. Ver Duff, M.J. (1975); Christensen, S.M., Duff, M.J. (1978, 1979).

16. Ver Parker, L. (1966, 1969); Zel'dovich, Ya.B., Starobinskii, A.A. (1972) y Fulling, S.A. (1972, 1973).

17. Ver Fischetti, M.V., Hartle, J.B., Hu, B.L. (1979); Hartle, J.B., Hu, B.L. (1979, 1980); y Hartle, J.B. (1980, 1981).

18. Ver Hawking, S.A. (1975).

19. Ver Bekenstein, J.D. (1974).

20. Ver Unruh, W.G. (1984).

21. Hay una serie de libros donde se recopilan todos estos resultados, de una forma bastante clara: ver Birrel, N.D., Davies, P.C.W. (1982); Fulling, S.A. (1989); y Wald, R.M. (1994).

4. CUANTIZACION CANONICA DE LA GRAVEDAD

Durante los años posteriores a la segunda guerra mundial la idea dominante consistía en imitar los procedimientos que habían tenido éxito en la construcción de las teorías cuánticas de otras interacciones. El electromagnetismo se había cuantizado con éxito mediante dos procedimientos: el formalismo canónico y el formalismo de *integrales de camino*. Para la interacción electromagnética los dos métodos son equivalentes.

Sin embargo en relatividad general la diferencia entre los dos procedimientos es profunda. La razón es la misma que separa la relatividad general de las demás teorías de campos en el espacio de Minkowski y complica el análisis de todos los resultados: en relatividad general no tenemos una geometría que sustente la teoría, es la teoría la que define la geometría. El espacio no está dado *a priori*, es el producto final de su evolución. El campo gravitatorio (la métrica del espacio-tiempo) describe tanto los aspectos dinámicos de la gravedad como la estructura geométrica del espacio-tiempo en sí mismo. De hecho para introducir los conceptos básicos de causalidad, tiempo y evolución deben resolverse primero las ecuaciones dinámicas y construir el espacio-tiempo. Por ejemplo para encontrar si un dato inicial dado lleva a la aparición de un agujero negro debe obtenerse primero su evolución maximal y, usando la estructura causal determinada por esa solución, preguntarse si el futuro infinito *nulo* tiene un límite pasado. En la teoría cuántica, los problemas son más serios. Cuantizar el campo gravitatorio es equivalente a cuantizar la estructura del espacio-tiempo. En la teoría cuántica de una sola partícula, debido al principio de incertidumbre, su trayectoria no puede ser bien conocida ya que la evolución temporal produce sólo una amplitud de probabilidad de presencia de la partícula en una región del espacio más que una trayectoria. Similarmente puede decirse en gravedad cuántica: después de evolucionar desde un estado inicial con una geometría bien determinada no se estará en un espacio-tiempo fijo. Sólo podrá decirse que hay una cierta amplitud de probabilidad respecto a una geometría. Por lo tanto, en ausencia de una geometría determinada, es una contradicción introducir nociones básicas como causalidad, tiempo, estados de *scattering*, etc.

Además hay un problema relativo al distinto papel que juega el tiempo en la formulación hamiltoniana de una teoría cuántica de campos y en relatividad general. En relatividad general no existe una elección del tiempo privilegiada. Esto significa que dicha elección no debe reflejarse en las predicciones físicas de la teoría. Sin embargo en la teoría cuántica de campos sólo se pueden hacer predicciones físicas cuando el tiempo pueda separarse del resto de las variables de configuración.

4.1 Teoría de P.A.M. Dirac. Formulación Hamiltoniana

A principios de los años 50 se conocía la formulación hamiltoniana de la relatividad general. A partir de entonces P.A.M. Dirac[22] en la universidad de Cambridge por un lado y P.G. Bergmann et al.[23], en la Universidad de Syracuse por otro, comenzaron a desarrollar un método de cuantizar la gravedad siguiendo el procedimiento canónico a pesar de los problemas mencionados en el apartado anterior. Definieron los operadores fundamentales de la te-

22. Ver Dirac, P.A.M. (1950, 1951).

23. Ver Bergmann, P.G., Penfield, R., Schiller, R., Zatzkis, H. (1950).

oría, y a través de sus relaciones de conmutación llegaron a obtener el principio de incertidumbre para este sistema. La noción de causalidad viene dada en este procedimiento por el hecho de que ciertos operadores conmutan sobre una variedad espacial de 3 dimensiones fija, es decir, el espacio tridimensional para un instante de tiempo dado. En contextos donde la geometría espacial tridimensional es asintóticamente plana, es decir, en los casos donde no hay fuentes de campo en el infinito, el movimiento generado por el hamiltoniano puede interpretarse como la evolución temporal del sistema.

Dirac y Bergman hicieron énfasis en el carácter geométrico de la relatividad general, manteniendo la fusión de la geometría y la gravedad como en la teoría de la relatividad general de Einstein.

Asociado al hecho de que no se puedan separar los grados de libertad dinámicos de las variables de configuración aparece el siguiente problema en este método de cuantizar la gravedad: las ecuaciones de la relatividad general no son todas independientes sino que existen ecuaciones que las relacionan. Definen por lo tanto un sistema ligado y hasta entonces, a principios de los 50, no se conocía un método general que desarrollara una teoría cuántica para sistemas con ligaduras. P.A.M. Dirac[24] se dedicó durante esta década a desarrollar una teoría cuántica general adecuada a sistemas ligados.

4.2. Formalismo ADM. Geometrodinámica

En 1962 R. Arnowitt, S. Deser y C.W. Misner[25], usando los métodos pioneros de Dirac y Bergmann obtuvieron una formulación hamiltoniana (formulación ADM) satisfactoria de la relatividad general. Los intentos de cuantizar la teoría clásica de la relatividad general a partir de esta formulación hamiltoniana fueron realizados a partir de 1965 por B.S. DeWitt y K. Kuchar[26]. Antes de explicar los éxitos y problemas de esta teoría vamos a sintetizar el programa de cuantización en el procedimiento canónico.

En el procedimiento canónico inicialmente se escribe la teoría clásica en su forma hamiltoniana y se identifican las variables canónicas conjugadas. Una vez identificadas se sustituyen las variables canónicas por operadores que satisfagan las relaciones canónicas de conmutación. Los estados cuánticos del sistema vendrán descritos por un espacio lineal de funciones de onda y por el álgebra de operadores definido sobre este espacio. El hamiltoniano clásico, después de sustituir las variables canónicas por sus operadores asociados se convierte en un operador sobre el espacio de las funciones de onda de modo que se obtiene una ecuación dinámica similar a la ecuación de Schrödinger para la función de una partícula. Para finalizar se define un producto interno sobre el espacio de las funciones de onda, soluciones de la ecuación citada anteriormente; esto define un espacio de Hilbert, que lleva a una interpretación probabilística de las funciones de onda.

El procedimiento de cuantización es complicado debido a la presencia de ligaduras. Estas ligaduras son tratadas en el método ADM según la teoría desarrollada por P.A.M. Dirac anterior-

24. Ver Dirac, P.A.M. (1958, 1959).

25. Ver Arnowitt, R., Deser, S., Misner, C.W. (1959a, 1959b, 1960).

26. Ver DeWitt, B.S. (1967b, 1967c); y Kuchar, K. (1981).

mente. Se separa el espacio-tiempo (supuesto globalmente hiperbólico) en una familia de superficies de Cauchy[27] de 3 dimensiones espaciales y en una coordenada temporal. Se elige como variable dinámica fundamental la métrica asociada a estas geometrías tridimensionales. Con esta separación 3+1 (3 coordenadas espaciales y una temporal) del espacio-tiempo se calculan todos los objetos relevantes en la relatividad general como la curvatura extrínseca, el tensor de Weyl, etc, separando explícitamente la parte temporal de la parte dependiente de las geometrías tridimensionales. A partir de la acción de Einstein-Hilbert se calcula el momento canónico conjugado de la métrica tridimensional. Con estas dos variables, la métrica tridimensional y su momento canónico conjugado, se escribe el hamiltoniano de la gravedad de modo que las ecuaciones de Einstein describen tanto las ligaduras entre la 3-métrica y su momento canónico conjugado, como las ecuaciones de evolución de estos campos. La teoría de la relatividad se reinterpreta como la teoría dinámica de las geometrías tridimensionales.

Debido a las ligaduras, el sistema tiene menos grados de libertad que los que presentan las diferentes 3-geometrías (las geometrías espaciales) ya que éstas están relacionadas a través de la libertad gauge del campo gravitatorio: la invariancia bajo el grupo de difeomorfismos[28]. Por lo tanto el espacio de configuración es el conjunto de las clases de equivalencia bajo el grupo de difeomorfismos de las métricas riemannianas sobre esas 3-geometrías. A este espacio se le llamó *superspace*.

Esta descripción hamiltoniana fue bautizada por J.A. Wheeler como *geometrodynamics* (geometrodinámica) y constituye el punto de partida de la cuantización canónica. Las variables y sus momentos conjugados se sustituyen por operadores. Sobre estos operadores se impionen las relaciones de conmutación que llevan al principio de incertidumbre. La ecuación dinámica que cumplen los funcionales de las 3-geometrías es la ecuación de Wheeler-DeWitt (ecuación correspondiente a la de Schrödinger para la gravedad). Ecuación que sólo se ha podido resolver en unos pocos casos con un alto grado de simetría (modelos de *minisuperspaces*).

La mayoría del trabajo en este procedimiento ha sido realizado de manera meramente formal ya que las ecuaciones cuánticas de la geometrodinámica involucran productos no regularizados de operadores de valor distribucional. Incluso a nivel formal, algunos de los principales resultados que se esperaba obtener permanecen ocultos porque las ecuaciones de ligadura son demasiado difíciles de resolver. El principal problema que presenta esta forma de trabajar es que la teoría de Dirac no da una prescripción general para separar las variables cinemáticas (tiempo, variables que definen las 3-geometrías) de las variables dinámicas (grados de libertad del sistema), separación indispensable para poder encontrar los estados físicos del campo gravitatorio.

4.3. Teoría hamiltoniana de Ashtekar

Entre 1986 y 1987 A. Ashtekar[29] propuso un nuevo procedimiento canónico basado en la geometrodinámica. La principal diferencia con la teoría de R. Arnowitt, S. Deser y C.W.

---

27. Superficie donde se establecen las condiciones iniciales necesarias para obtener la evolución completa del sistema.

28. Un espacio-tiempo puede ser descrito por distintas métricas que se relacionan a través de cambios de coordenadas.

29. Ver Ashtekar, A. (1986, 1987).

Misner es que A. Ashtekar consideró como variables dinámicas fundamentales las conexiones[30] en vez de las métricas de las geometrías tridimensionales -*connection dynamics*-. Esto añadió nuevas herramientas conceptuales a la teoría que no aparecían en la geometrodinámica. Las nuevas variables canónicas simplifican las ecuaciones de campo tanto en la teoría cuántica como en la estructura hamiltoniana clásica de la relatividad general. Con estas simplificaciones pueden resolverse de forma exacta las ecuaciones cuánticas de ligadura. Este es uno de los principales éxitos del método de Ashtekar.

La idea de formular la teoría de la gravedad en términos de las conexiones no era nueva. Las demás interacciones fundamentales entre partículas elementales tienen lugar a través de partículas intermediarias *(bosones gauge)*, descritas clásicamente por una conexión. Era natural por lo tanto, intentar formular la gravedad de forma similar a las demás interacciones considerando una conexión. En los primeros intentos se consideraron nuevas teorías de la gravedad basadas en una acción de tipo Yang-Mills[31]. Como esta acción es cuadrática en la curvatura, las ecuaciones que aparecen son de orden cuártico en la métrica mientras que las ecuaciones de Einstein clásicas son de orden inferior en la métrica. Se sabe que existen soluciones de las ecuaciones obtenidas a través de la acción de tipo Yang-Mills que no lo son de las ecuaciones de Einstein.

En el procedimiento seguido por Ashtekar, sin embargo, no cambian las ecuaciones del campo gravitatorio. La teoría subyacente es la relatividad general de Einstein. Las ecuaciones de Einstein son reinterpretadas como las ecuaciones que gobiernan la dinámica de una conexión. La estrategia es viable al menos en relatividad general libre de fuentes: como el tensor de Riemann y el tensor de Ricci pueden construirse usando sólo la conexión, la ecuación de Einstein libre de fuentes puede tomarse como una ecuación para la conexión. En la forma hamiltoniana, se utiliza la acción de Palatini del formalismo de tétradas y unas *conexiones autoduales* complejas definidas a través de las conexiones de Lorentz[32] sobre la variedad espacio-tiempo. Definiendo como variables de configuración estas conexiones autoduales y sus momentos conjugados, las ecuaciones de Einstein se simplifican considerable-mente, ya que las ecuaciones de ligadura y las ecuaciones dinámicas son polinomios de estas variables canónicas. Aún así aparece una ligadura como consecuencia de que las variables utilizadas son complejas.

Las ecuaciones de ligadura, escritas de esta forma, pueden resolverse exactamente constituyendo un avance considerable frente a la geometrodinámica.

4.4. Cuantización canónica en el formalismo de Ashtekar

En el apartado anterior se ha descrito la teoría clásica del formalismo de A. Ashtekar. La cuantización de esta teoría fue llevada a cabo por T. Jacobson, L. Smolin, C. Rovelli y por el propio A. Ashtekar[33] a finales de los 80. El programa de cuantización no ha sido completado

---

30. Las conexiones son a la curvatura como el potencial eléctrico es al campo eléctrico.

31. Acción utilizada en cromodinámica cuántica.

32. Construídas a partir de la simetría local del espacio-tiempo. El formalismo de tétradas consiste en utilizar el principio de equivalencia: en cada punto se puede definir un sistema de referencia localmente plano definido a través de 4 vectores ortogonales que conforman la tétrada.

33. Ver Jacobson, T., Smolin, L. (1988); Rovelli, C., Smolin, L. (1988); Rovelli, C. (1990, 1991); y Ashtekar, A. (1991).

aún, debido a que algunos problemas no han podido solucionarse hasta ahora. Sin embargo el avance frente al programa de cuantización canónica desarrollado a partir de la geometrodinámica ha sido muy grande.

Vamos a exponer brevemente el programa de cuantización de la gravedad seguido por T. Jacobson, L. Smolin y C. Rovelli.

El procedimiento general de cuantización trata inicialmente de encontrar un espacio vectorial complejo que contenga las coordenadas del espacio de fase con el que el procedimiento de cuantización de Dirac para sistemas con ligaduras no dé lugar a ambigüedades. El candidato para espacio de funciones que actúen sobre el espacio de fases es el espacio de funcionales lineales de la conexión y la *tríada* [34], que son las variables dinámicas del sistema. La tríada es la variable canónica conjugada de la conexión. Con esta elección se construye el álgebra de los operadores que actúan sobre este espacio vectorial de funcionales imponiendo las relaciones canónicas de conmutación. Una vez que es conocido este álgebra de operadores se busca una representación lineal del álgebra sobre el espacio de los funcionales obteniendo así explícitamente los operadores que representan las ligaduras del sistema. Al aplicar estos operadores sobre el espacio vectorial se obtiene la versión cuántica de las ecuaciones de ligadura. El problema de este formalismo radica en encontrar el subespacio de funciones de onda que cumplan las ecuaciones cuánticas de ligadura (éste será el espacio de los estados físicos). T. Jacobson y L. Smolin encontraron la solución de este complicado problema. Los *objetos* que cumplen todas las ecuaciones cuánticas de ligadura son esencialmente los *Wilson loops* (las trazas de exponenciales ordenadas temporalmente de integrales de las conexiones alrededor de caminos cerrados). Sin embargo estos objetos no son invariantes bajo difeomorfismos. Estos funcionales solo pueden integrarse formalmente sobre el grupo de difeomorfismos de geometrías tridimensionales, deben de ser reconstruídos a partir de ellos mismos de modo que los *funcionales* resultantes sean los que cumplen todas las ligaduras. Toda esta integración que estamos comentando es puramente formal y no puede resolverse de manera explícita.

El proceso de cuantización no ha acabado ya que no se ha conseguido definir un producto interno dentro del espacio de los lazos de Wilson con el que uno podría definir un espacio de Hilbert y obtener una interpretación probabilística de la teoría.

Se han hecho progresos en una *teoría simplificada* en la cual se desarrollan las ligaduras alrededor del espacio-tiempo clásico. Esta es una línea de investigación no finalizada actualmente.

4.5. Gravedad en 2+1 dimensiones

En gravedad 2+1, es decir, considerando la geometría del espacio-tiempo es tal que su parte espacial tiene solo 2 dimensiones, E. Witten[35] consiguió cuantizar *completamente* la gravedad. Esta es la única teoría que lo ha conseguido hasta ahora.

---

34. Correspondiente a la tétrada en el espacio de tres dimensiones.

35. Ver Witten, E. (1988).

A. Achúcarro y P.K. Townsend[36] demostraron que las teorías de gravedad en 2+1 dimensiones pueden ser interpretadas como una teoría de Chern-Simons. En este caso los grados de libertad del tensor de Riemann y los del tensor de Ricci coinciden de manera que no existen ondas gravitatorias como solución de las ecuaciones de campo con estas dimensiones del espacio físico. Con ello E. Witten escribe la acción de Einstein-Hilbert de forma topológica, es decir, describiendo el espacio de forma global, al estilo de las teorías de Chern-Simons que sí se saben cuantizar. Reduce las ecuaciones de ligadura y obtiene un espacio de soluciones con el que se puede continuar el mecanismo de cuantización. Este espacio de soluciones está constituído por los lazos de Wilson de nuevo, pero al estar considerando sólo 2 dimensiones espaciales se tiene la ventaja de que todas las geometrías son planas bajo una transformación conforme[37].

El desarrollo de la teoría cuántica de la gravedad no ha finalizado ya que no se sabe si es posible la generalización de estos resultados obtenidos en 2+1 dimensiones al caso físico, de dimensiones 3+1. A pesar de ello se espera que este tipo de teorías en dimensiones diferentes a las dimensiones físicas ayuden a entender el comportamiento del universo real.

5. MÉTODO DE LAS INTEGRALES DE CAMINO

Cualquier teoría cuántica de campos puede ser planteada de forma completa-mente satisfactoria utilizando el formalismo de *path integrals* (integrales de camino). Este formalismo es un concepto diferente de entender los procesos cuánticos ya que se trabaja directamente con amplitudes de probabilidad sin necesidad de recurrir a los espacios de Hilbert de una partícula ni a otros conceptos fundamentales en el formalismo canónico. Sin embargo los dos formalismos son completamente equivalentes.

El método de las integrales de camino ha dado resultados muy importantes desde que R.P. Feynman desarrollara la electrodinámica cuántica a partir de este formalismo en los años 40[38].

S.W. Hawking[39] a finales de los años 70 y principios de los 80 comenzó a construir una teoría cuántica de campos para la interacción gravitatoria aplicando el formalismo de las integrales de camino. Más adelante J.J. Halliwell y J.B. Hartle[40] continuaron junto a S.W. Hawking desarrollando esta teoría y logrando obtener una interpretación física de los resultados parciales conseguidos hasta entonces. También este formalismo aplicado a la gravedad presenta problemas que no han sido solucionados completamente hasta el momento como ocurría en el formalismo canónico.

---

36. Ver Achúcarro, A., Townsend, P.K. (1989).

37. Transformación de *reescalado* local (depende del punto donde se realiza) manteniendo las distancias angulares.

38. Un libro a nivel de carrera donde se describe completamente el formalismo de integrales de camino en mecánica cuántica es: Feynman, R.P., Hibbs, A.R. (1965)*Quantum Mechanics and Path Integrals* . 1ºEdición. Mc-Graw Hill, New York.

39. Ver Hawking, S.W. (1979).

40. Ver Halliwell, J.J., Hawking, S.W. (1985); y Hartle, J.B. (1988).

Con las integrales de camino se obtienen resultados interesantes ya que se evitan algunos problemas que aparecen en el procedimiento canónico. De hecho esta formulación no precisa de espacio de Hilbert, ni de estados asintóticos (esenciales en el procedimiento covariante con la matriz de *scattering*), ni de operadores de campo ni de hamiltoniano: este procedimiento de cuantización trata directamente con amplitudes de probabilidad, que son las cantidades físicas de mayor interés. Además el límite clásico y el semiclásico swe obtienen de manera simple a través del desarrollo perturbativo, es decir, cuando la acción es mucho mayor que la constante de Plank.

Aún así existe un problema importante: no hay una prescripción general para definir una medida apropiada en relatividad general sobre los posibles estados del campo gravitatorio, o sea, sobre las posibles geometrías. En la integral de camino los estados vienen descritos por las variables de configuración, en nuestro caso, las coordenadas del espacio-tiempo. Como se ha comentado anteriormente en relatividad general no puede separarse de forma trivial el tiempo de las variables espaciales. El tiempo no juega ningún papel especial frente a cualquier otra coordenada.

Aunque el problema de la medida es esencial, en la mayor parte del trabajo puede ignorarse. Se ha demostrado que no existe ninguna medida no trivial que sea invariante bajo difeomorfismos en el espacio de configuración (que es el espacio de las diferentes geometrías de 3 dimensiones en este caso). Lo que se hace entonces es usar una estructura más sencilla que una medida, una *medida intermedia*, con la que se espera poder resolver el problema.

La formulación de integrales de camino comienza con la acción clásica. La acción utilizada en gravedad es la acción de Einstein-Hilbert pero puede usarse otra acción con mejor comportamiento a cortas distancias para la cual la teoría de la relatividad general de Einstein sea un límite de baja energía.

Los principales elementos de este formalismo son los siguientes: por un lado está el conjunto de observables que describen los resultados de todos los posibles experimentos. Son las posibles *historias.* Se definirá la amplitud de probabilidad de que tenga lugar una historia particular como la exponencial de veces la acción funcional real de cada historia. Por otro lado deben conocerse los observables que constituyen una historia y que se clasifican en tres grupos: *condiciones,* observables fijados por las condiciones del experimento; *observaciones,* observables que son medidos; e *inobservables,* partes de la historia que ni condicionan ni son medidos. Con ellos se define la probabilidad condicional de obtener cierto conjunto de observaciones una vez que el sistema ha evolucionado a partir de un conjunto de condiciones. Se obtendrá una interpretacion probabilística si podemos encontrar un conjunto completo de observaciones para un sólo conjunto dado de condiciones.

Para aplicar este formalismo a una teoría particular debemos especificar las posibles historias, la acción funcional, las reglas de la suma previa (la medida) y el conjunto completo de observables. Por ejemplo, en el caso de una partícula las historias son las posibles trayectorias que puede seguir la partícula para ir desde una posición determinada a otra (condiciones) y el conjunto completo de observaciones son las posiciones de la partícula en todos los tiempos intermedios.

En la teoría de la gravedad, las historias son los diferentes *espacio-tiempos*, cada uno de ellos es una variedad de 4 dimensiones representada por una métrica de signatura Lorentziana. Se puede sumar sobre las historias teniendo en cuenta los cambios de topología entre diferentes variedades, es decir, teniendo en cuenta las diferentes estructuras globales de dichos espacios. En este formalismo no está permitida la descomposición de la geometría del espacio-tiempo en una parte espacial tridimensional y una parte temporal como se hacía en el método canónico. La acción utilizada es la acción de Einstein-Hilbert modificada con un término de constante cosmológica y un término de superficie que, aunque no interviene en las ecuaciones de movimiento, produce contribuciones esenciales en este formalismo.

Se define la amplitud de probabilidad condicional de que en el espacio-tiempo tenga lugar una *superficie* espacial tridimensional descrita por una 3-métrica determinada habiendo partido de otra superficie tridimensional espacial como la suma de las amplitudes de probabilidad de todos los espacio-tiempos distintos físicamente posibles que tomen los valores de esas métricas tridimensionales sobre dos piezas de su frontera.

En la teoría de la gravedad es muy difícil identificar el completo de observables y, por lo tanto identificar la medida sobre la que hacer esta suma. En este formalismo debe tenerse en cuenta además la ligadura sobre la medida debida a la simetría gauge que posee la gravedad, lo que complica las cosas más aún.

J.J Halliwell[41] logró identificar la ecuación de Wheeler-DeWitt para las funciones de estado escritas en el formalismo de integrales de camino presentando la conexión con el formalismo canónico.

5.1. Gravedad cuántica euclideana

En teorías de campos sobre un espacio plano suele utilizarse una variante del formalismo de integrales de camino: la *continuación analítica* al espacio complejo de la coordenada temporal: . Con este cambio se consigue una nueva variedad (espacio-tiempo) de signatura euclideana. En esta geometría algunas cantidades importantes, como por ejemplo la acción, están bien definidas. Una vez obtenidas ciertas predicciones físicas se deshace el cambio realizado para la continuación analítica recuperándose los resultados en el espacio físico.

S.W. Hawking propuso la continuación analítica en el formalismo de integrales de camino para la gravedad. Sin embargo con este cambio no se resuelven todos los problemas debido a que la acción euclideana (la acción de Einstein-Hilbert tras hacer la continuación analítica en la coordenada temporal) no está bien definida en una geometría general como en el caso plano. Se sabe que está bien definida en métricas asintóticamente euclideanas (con curvatura nula).

S.W. Hawking y G. Gibbons[42] propusieron la siguiente prescripción para conseguir resolver las integrales de camino en gravedad cuántica: dividir el espacio de todas las métricas en clases de equivalencia bajo difeomorfismos. Se elige en cada clase de equivalencia la métrica para la cual la curvatura intrínseca es nula y se integra sobre todas las clases de equivalencia. Con ello consiguieron continuar el programa de cuantización pero aún no se han resuelto todos los problemas que aparecen en el formalismo.

41. Ver Halliwell, J.J. (1987, 1988).

42. Ver Gibbons, G., Hawking, S.W. (1977).

6. COSMOLOGIA CUANTICA

Se sabe que actualmente los efectos cuánticos en cosmología son despreciables porque no tienen lugar procesos en los que se involucren escalas de energía del orden de la escala de Planck. Por eso el universo a gran escala está descrito con exactitud por la teoría clásica de la relatividad general.

Sin embargo la teoría clásica predice una singularidad en el pasado donde la curvatura es infinita y la física clásica no puede aplicarse. Cerca de la singularidad tienen lugar procesos que involucran campos muy fuertes, de gran energía (cerca de las escalas de Planck) donde los efecos cuánticos serán importantes. Por lo tanto las condiciones iniciales de la cosmología clásica deben ser determinadas por la gravedad cuántica.

La especificación de las condiciones de contorno (iniciales) del universo es equivalente a dar una prescripción para el estado cuántico inicial del universo.

Actualmente el estado del universo es un estado de baja excitación. Esto se deduce de la homogeneidad e isotropía a gran escala y de las estimaciones de la entropía de la materia que existe en el universo. Se postula como estado cuántico del universo el estado de excitacion mínima.

Durante los años 80 S.W. Hawking y A. Vilenkin[43] proponen dos prescripciones para calcular este estado inicial:

Prescripción de Hawking: El estado cuántico del universo está definido por una integral de camino sobre todas las métricas euclideanas compactas. La idea es que el universo sea autocontenido: la condición de contorno del universo es que no tiene contorno.

Prescripción de Vilenkin: El estado cuántico del universo es el que proviene por efecto túnel de la *nada*.

Existen otras prescripciones para calcular el estado inicial del universo pero éstas son las más utilizadas actualmente.

7. OTRAS TEORIAS PARA LA GRAVEDAD

Los intentos de hacer una teoría unificada completa de todas las interacciones físicas continúan sin dar resultados globales debido a la imposibilidad de encontrar una teoría cuántica de la gravedad, como hemos visto.

Hay dos tipos de teorías que parecen más satisfactorias en este sentido: las *teorías de cuerdas* y las *teorías de supergravedad.*

Las teorías de cuerdas[44] nacen a finales de los años 60 en los modelos *duales* para explicar la interacción fuerte. Sin embargo en estos modelos duales aparecían partículas de masa negativa - *taquiones* [45] - y además no describían adecuadamente los fenómenos observados

---

43. Ver Hartle, J.B., Hawking, S.W. (1983); Hawking, S.W. (1984); Vilenkin, A. (1982, 1986, 1988).

44. Las teorías de cuerdas consideran los cuantos como unidimensionales.

45. Son partículas que viajan a más velocidad de la luz.

en la difusión inelástica de alta energía. Por estos motivos y porque a mediados de los años 70 apareció la teoría de la cromodinámica cuántica, que sí incorporaba estos fenómenos, se abandonó como teoría de las interacciónes fuertes. Ahora bien, entre las partículas sin masa que habían sido predichas en estos modelos aparecía una de espín 2, es decir, el gravitón, por lo que surgió la sospecha de que estas teorías podían ser buenos candidatos para la cuantización de la gravedad. Esta impresión quedó reforzada con la introducción de la *supersimetría* en los modelos duales (teoría de *supercuerdas*), que eliminó el taquión de la teoría.

Hoy en día, aunque la promesa que encerraban estos modelos, la unificación de todas las interacciones fundamentales, no ha sido realizada por completo siguen siendo estos modelos duales unos de los más firmes candidatos para una descripción fundamental de la gravedad[46].

Las teorías de supergravedad fueron descubiertas a mediados de los años 70 por D.Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen y S. Ferrara[47]. Son unas teorías de campos en las cuales el gravitón está considerado como parte de un *multiplete* de partículas donde se incluyen también fermiones y bosones. Se define un nuevo campo de espín semientero, el *gravitino*, de forma que desaparecen de la teoría las divergencias ultravioletas que tenían las demás teorías de gravedad cuántica vista como una teoría de campos.

8. CONCLUSIONES

Como hemos visto, aún se está muy lejos de conseguir una teoría cuántica de la gravedad. Algunos físicos creen que los problemas que resultan de la teoría de la gravedad formulada en términos geométricos son insalvables. Incluso algunos opinan que no es necesaria una teoría cuántica de la gravedad. Sin embargo todos los modelos aparecidos hasta ahora, a pesar de no haber conseguido el objetivo original, han contribuído a un conocimiento más profundo de las leyes de la naturaleza.

Hoy en día la teoría cuántica de la gravedad continúa siendo un reto apasionante para los físicos. Se sigue avanzando a través de los modelos que hemos descrito en este trabajo: el formalismo canónico de Ashtekar, el método de las integrales de camino, los modelos duales y la supergravedad. La carrera hacia la descripción unificada de todas las interacciones fundamentales no ha terminado.

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a los profesores del Departamento de Física Teórica e Historia de la Ciencia de la Universidad del País Vasco (UPV/EHU) J. Llombart, por proponerme la realización de este trabajo; A. Feinstein, por su ayuda en la realización del mismo; I. Egusquiza y A. Achúcarro, por sus comentarios y sugerencias. También quiero agradecer a mis compañeros su ayuda y apoyo.

46. Como referncia general, que a pesar de estar escrita en 1987, contiene muchísima información válida hasta la fecha: M.B. Green, J.H. Schwartz, E. Witten (1987).

47. Ver Freedman, D.Z., van Nieuwenhuizen, P. y Ferrara, S. (1976).

9. BIBLIOGRAFIA

ARNOWITT, R., DESER, S., MISNER, C.W. (1959) "Quantum Theory of Gravitation: General Formulation and Lizearized Theory". *Phys. Rev., 113,* 745-50.

ARNOWITT, R., DESER, S., MISNER, C.W. (1959) "Dynamical Structure and definition of Energy in General Relativity". *Phys. Rev., 116,* 1322-30.

ARNOWITT, R., DESER, S., MISNER, C.W. (1960) "Canonical Variables for general Relativity". *Phys. Rev., 117,* 1595-1602.

ASHTEKAR, A. (1986) "New variables for Classical and Quantum Gravity". *Phys. Rev. Lett., 57,* 1587-1602.

ASHTEKAR, A. (1987) "New Hamiltonian Formulation of General Relativity". *Phys. Rev., D36,* 1587-1602.

ASHTEKAR, A. (1991) *Lectures on non-perturbative canonical gravity.* 1º Edición, World Scientific, Singapore.

BEKENSTEIN, J.D. (1974) "Generalized Second Law of Thermodynamics in Black Hole Physics". *Phys. Rev., D9,* 3292-3300.

BERGMANN, P.G., PENFIELD, R., SCHILLER, R., ZATZKIS, H. (1950) "Hamiltonian of the General Theory of Relativity". *Phys. Rev., 80,* 81-88.

BIRREL, N.D., DAVIES, P.C.W. (1982) *Quantum Fields in Curved Space.* 1º Edición, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

BOHR, N., ROSENFELD, L. (1933) " " *Det Kgl. Danske Videnskab. Selkb. Mat-Fys. Med., 12,* 65.

CHRISTENSEN, S.M., DUFF, M.J. (1978) "Axial and Conformal Anomalies for arbitrary spin in Gravity and Supergravity" *Phys. Lett. 76B,* 571-574.

CHRISTENSEN, S.M., DUFF, M.J. (1979) *Nucl. Phys., 154B,* 301.

DE WITT, B.S. (1967) "Quantum Theory of Gravity I. The Canonical theory". *Phys. Rev., 160,* 1113-1148.

DE WITT, B.S. (1967) "Quantum Theory of Gravity II. The manifestly Covariant Theory". *Phys. Rev., 160,* 1195-1239.

DE WITT, B.S. (1967) "Quantum Theory of Gravity III. Applications of the Covariant Theory". *Phys. Rev., 160,* 1239-1256.

DIRAC, P.A.M. (1950) "Generalized Hamiltonian Dynamics". *Canadian Journal of Mathematics, 2,* 129-148.

DIRAC, P.A.M. (1951) "The Hamiltonian form of Field Dynamics". *Canadian Journal of Mathematics, 3,* 1-23.

DIRAC, P.A.M. (1958) "Generalized Hamiltonian Dynamics". *Proc. R. Soc. Lond., A246,* 333-343.

DIRAC, P.A.M. (1959) "Fixation of Coordinates in the Hamiltonian Theory of Gravitation". *Phys. Rev., 114,* 924-930.

DUFF, M.J. (1975) "Observations on conformal anomalies". *Nucl. Phys., 125B,* 334-347.

FISCHETTI, M.V., HARTLE, J.B., HU, B.L. (1979) "Quantum effects in the universe I: Influence of trace anomallies onhomogeneous, isotropic, classical geometry". *Phys. Rev., D20,* 1757-1771.

FREEDMAN, D.Z., van NIEUWENHUIZEN, P., FERRARA, S. (1976) "Progress a Theory of Supergravity". *Phys. Rev., D13,* 3214.

FULLING, S.A. (1972) "Scalar Quantum Field Theory in a Closed Universe of Constant Curvature" *Ph. D. Thesis.* Ed. Princeton Univ.

FULLING, S.A. (1973) "Nonuniqueness of Canonical Field Quantization in Riemannian Space-time". *Phys. Rev. D7,* 2850-2862.

FULLING, S.A. (1989) *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Spacetime.* 1º Edición. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

GEORGI, H., GLASHOW, S.L. (1974) "Unity of All Elementary-Particle Forces". *Phys. Rev. Lett. 32,* 438-441.

GIBBONS, G., HAWKING, S.W. (1977) "Action integrals and partition functions in quantum gravity". *Phys. Rev., D15,* 2752-2756.

HALLIWELL, J.J. (1987) "Correlations in the wave function of the universe". *Phys. Rev., D36,* 3626-3640.

HALLIWELL, J.J. (1988) "Derivation of the Wheeler-De Witt equation from a path integral for minisuperspace models". *Phys. Rev., D38,* 2468-2481.

HALLIWELL, J.J., HAWKING, S.W. (1985) "Origin of structure in the universe". *Phys. Rev., D31,* 1777-1791.

HARTLE, J.B. (1980) "Quantum effects in the universe IV: Nonlocal effects in particle production in anisotropic models". *Phys. Rev., D22,* 2091-2095.

HARTLE, J.B. (1981) "Quantum effects in the universe V: Finite production without trace anomalies". *Phys. Rev., D23,* 2121-2128.

HARTLE, J.B. (1988) "Quantum Kinematics of spacetime I. Nonrelativistic theory". *Phys. Rev., D37,* 2818-2832.

HARTLE, J.B., HAWKING, S.W. (1983) "Wave function of the Universe". *Phys. Rev., D28,* 2960-2975.

HARTLE, J.B., HU, B.L. (1979) "Quantum effects in the universe II: Effective action for Scalar Fields in homogeneous cosmologies with small anisotropies". *Phys. Rev., D20,* 1772-1782.

HARTLE, J.B., HU, B.L. (1980) "Quantum effects in the universe III: dissipation of anisotropies by scalar particle production". *Phys. Rev., D21,* 2756-2769.

HAWKING, S.W. (1975) "Particle Creation by Black Holes". *Commun. Math. Phys, 43,* 199-220.

HAWKING, S.W. (1979) "The path integral approach to quantum gravity". En: S.W. Hawking and W. Israel (eds). *General Relativity: An Einstein Centenary Survey.* 1º Edición, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 746-789.

HAWKING, S.W. (1984) "The quantum state of the universe". *Nucl. Phys., B239,* 257-276.

JACOBSON, T., SMOLIN, L. (1988) "Nonperturbative quantum geometries". *Nucl. Phys., B299,* 295-345.

KUCHAR, K. (1981) "Canonical Methods of Quatization". En: C.J. Isham, R. Penrose, D.W. Sciama (eds). *Quantum Gravity, vol. 2,* 1. Oxford: Claredon Press, Oxford.

van NIEUWENHUIZEN, P., FREEDMAN, D.Z. (1979) *Supergravity.* 1º Edición, North Holland, Amsterdam.

PARKER, L. (1966) "The Creation of Particles in Expanding Universes" *Ph. D. Thesis.* Ed. Harvard Univ.

PARKER, L. (1969) "Quantized Fields and Particle creation in Expanding Universes" *Phys. Rev., 183,* 1057-1068.

PAULI, W., FIERZ, M.E. (1939) *Helvetica Physica Acta, 12,* 297.

ROSENFELD, L. (1930) "Zur quantelung der Wellenfelder" *Annalen der Physics (Leipz.) 5,* 113.

ROSENFELD, L. (1932) *Institut Henri Poincaré, Annales 2,* 25.

ROVELLI, C. (1990) "Loop space representation of Quantum General Gravity". *Nucl. Phys., B331,* 80-152.

ROVELLI, C. (1991) "Ashtekar formulation of general relativity and loop-space non-perturbative quantum gravity: a report". *Class. Quantum Grav., 8,* 1613-1675.

ROVELLI, C., SMOLIN, L. (1988) "Knot Theory and Quantum Gravity". *Phys. Rev. Lett., 61,* 1155-1158.

SALAM, A. (1968) "Weak and electromagnetic interactions". En: N. Svartholm *Elementary Particle Theory,* Stockholm, Almsquist, Forlag AB, 367.

SCHRÖDINGER, E. (1932) *Sitz. Preuss. Akad. Wiss,* 105.

UNRUH, W.G. (1976) "Notes on Black Hole Evaporation". *Phys. Rev., D14,* 870-892.

VILENKIN, A. (1982) “Creation of universes fron nothing” *Phys. Lett., B117,* 25-28.

VILENKIN, A. (1986) “Boundary conditions in Quantum cosmology” *Phys. Rev., D33,* 3560-3569.

VILENKIN, A. (1988) “Quantum Cosmology and the initial state of the Universe” *Phys. Rev., D37,* 888-897.

WALD, R.M. (1994) *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics.* 1º Edición, Chicago Lectures in Physics, Chicago.

WEINBERG, S. (1967) *Phys. Rev. Lett. 19,* 1264.

WITTEN, E. (1988) “2+1 dimensional gravity as a exactly soluble system”. *Nucl. Phys., B311,* 46-78.

ZEL’DOVICH, Ya. B., STAROBINSKII,A.A. (1971) “Particle creation and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field” *Sov. Phys. - JETP 34,* 1159-1166.