Métodos algebráicos en geometría. De Sócrates a la Ingeniería genética

(Algebraic methods in geometry. From Socrates to genetic engineering)

Castellet, Manuel
Eusko Ikaskuntza
Miramar Jauregia - Miraconcha, 48
20007 Donostia

BIBLID [1137-4411 (1999), 5; 227-236]

El estudio de aquellas propiedades de los cuerpos que no se alteran por deformaciones continuas es el objetivo de la topología algebraica. Partiendo de un diálogo socrático imaginario se introducen conceptos de teoría de homología y teoría de homotopía que permiten diferenciar la superficie de una esfera de la de un toro. Finalmente se introduce la técnica de localización para obtener propiedades de un espacio a partir de las de sus localizados en cada número primo.

Palabras Clave: Topología algebraica. Homología. Homotopía. Localización.

Deformazio jarraituek aldatzen ez dituzten gorputzen propietateak aztertzea da topologia algebraikoaren helburua. Elkarrizketa sokratiko batetik abiaturik, homologia eta homotopiaren teorien kontzeptu batzuk aurkezten dira, esferaren gainazala eta toruarena bereizten laguntzeko. Azkenik, espazio baten propietateak lokalizatzeko teknika aurkezten da, zenbaki lehen bakoitzeko espazio horren lokalizatuen propietateetatik abiaturik.

Giltz-Hitzak: Topologia algebraikoa. Homologia. Homotopia. Lokalizazioa.

L'étude des propriétés des corps qui ne s'altèrent pas par déformations continues, est le but de la topologie algébrique. En partant d'un dialogue socratique imaginaire on introduit des concepts de théorie d'homologie et théorie d'homotopie qui permette de différencier la surface d'une sphère de celle d'un tor. Finalement, on introduit la technique de localisation pour obtenir des propriétés d'un espace à partir de celles de ces localisées dans un nombre premier.

Mots Clés: Topologie algébrique. Homologie. Homotopie. Localisation.

Relacionar Sócrates con la ingeniería genética a través de la geometría y del álgebra es, desde luego, una pretensión que no podría satisfacer aunque esta fuera mi verdadera intención. ¿Por qué, pues, he escogido este título? Mi intención es poner de manifiesto como ciertos problemas geométricos planteables a nivel elemental -algunos incluso susceptibles de ser comprendidos por cualquier ciudadano-, solamente pueden ser resueltos mediante la introducción de invariantes algebraicos que, si bien pueden tener una interpretación fácil, requieren de herramientas a veces sofisticadas.

¿Dónde aparecen en esta argumentación Sócrates i la ingeniería genética? Sócrates aparecerá en el inicio mismo de la concepción -intelectual, no física o material- de la topología algebraica. La ingeniería genética fue uno de los modelos que adoptó la topología a partir de los años setenta para la construcción de espacios nuevos con propiedades predeterminadas; no se trata, como veremos, de una clonación, sino de una manipulación genética.

LA NECESIDAD DE LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA (SÓCRATES)

Supongamos un ciudadano -que en algunos momentos deberá ser un estudiante de matemáticas- que se plantea las siguientes cinco preguntas:

Problema 1. Si U es un abierto de la esfera S^2 y V es un subconjunto de S^2 homeomorfo a U, ¿es V abierto?

Problema 2. ¿Existen aplicaciones contínuas del disco en sí mismo sin ningún punto fijo?

Problema 3. ¿Existen campos vectoriales contínuos tangentes sobre la esfera que no valgan cero en ningún punto?

Problema 4. ¿Existen dos puntos antipodales de la tierra con la misma presión y la misma temperatura en cada momento dado?

Problema 5. ¿Podemos distinguir entre una naranja y un dónut? ¿Podemos deformar con continuidad (la superficie de) una naranja hasta obtener (la superficie de) un dónut? ¿Podemos distinguir intrínsecamente una esfera de un toro?

Si nuestro sujeto es un estudiante de matemáticas que ya ha captadp de qué manera hay que plantear la resolución de problemas, o si simplemente se trata de un individuo inteligente -afortunadamente la intersección de los dos colectivos no sólo no es vacía, sino que el segundo colectivo debe de contener al primero-, lo primero que hará será observar que sus cinco preguntas son 2-dimensionales e intentará dar una respuesta a los problemas análogos en dimensión uno a los planteados en dimensión dos. ¿Qué ocurre en dimensión 1?

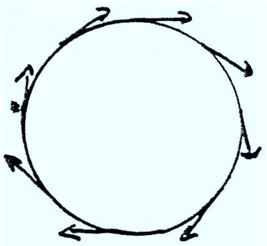
La respuesta al primer problema es sí: O bien U es toda la circunferencia, o bien U es unión de intervalos abiertos (que son conexos).

La respuesta al segundo problema es no: Si $f(x) = x$ para todo x, la aplicación

$$
\begin{array}{lll}
I \to \{a,b\} & & \\
x \to a & & \text{si } x < f(x) \\
x \to b & & \text{si } x > f(x)
\end{array}
$$

no sería contínua, ya que I es conexo y el conjunto de dos elementos $\{a,b\}$ no lo es.

La respuesta al tercer problema es, de nuevo, sí: Basta tomar el vector tangente unitario en cada punto de la circunferencia:



La solución del cuarto problema es también afirmativa: Si $f(-x) \neq f(x)\ \forall x$, $g(x) = f(x) - f(-x) \neq 0\ \forall x$; pero si $g(x) > 0$, $g(-x) < 0$ y, por el teorema de Bolzano, existe un x tal que $g(x) = 0$.

Finalmente, en dimensión uno los análogos de la esfera y del toro son ambos la circunferencia, por lo cual, en nuestro quinto problema, no podemos distinguirlos.

Precisamente esta última cuestión 2-dimensional es la que Sócrates (Alopeke, Ática, 470 - Atenas, 399 aC) planteó a su discípulo Glaucón en un típico diálogo socrático. (Según el diccionario, “diálogo socrático: que sin saber la verdad sobre un argumento determinado, plantea al interlocutor una serie de preguntas, hace emerger poco a poco sus contradicciones y siembra la duda crítica en aquello que creía saber”.)

Veamos la transcripción de este diálogo hecha por Jaume Aguadé (1943-) en 1980.

Socrates: ¿Has observado, amigo Glaucón, estos pasteles llamados dónuts que tienen una forma tan curiosa?

Glaucón: Sí, ciertamente, los he visto.

S: Y ¿crees que la forma que presentan podría confundirse, digamos, con la de una naranja?

G: Pienso que no, dado que ambas formas son muy distintas.

S: Pienso lo mismo, amigo mío. A pesar de eso, ¿crees que podrías dar a un forastero que nunca hubiera visto estos objetos ni ninguno parecido un método para distinguirlos sin error?

G: Le diría que las naranjas son redondas y que los dónuts tienen un agujero en el centro. Creo que así lo entendería.

S: Es posible que te entendiera, pero tu método no está libre de error.

G: Y ¿cómo es eso?

S: En primer lugar, no es seguro que nuestro forastero inculto conozca el sentido de la palabra “redondo” y en caso de conocerlo, podría aplicarlo al dónut, dadas sus formas redondeadas y al hecho de que es apto para rodar por una pendiente.

G: Indiscutiblemente, hemos de convenir que el criterio de la redondez no es del tipo de los que nos convienen. Pero también hay el criterio del agujero.

S: Y ¿cómo explicarías a nuestro forastero qué es un agujero?

G: Le diría que el agujero que tiene el dónut es la parte del dónut donde no hay dónut.

S: Ahora sí que te has liado, amigo Glaucón. Si el agujero es donde no hay dónut, ¿cómo puede ser una parte del dónut? Y si tu quieres explicar qué es un dónut, ¿cómo puedes hacerlo basándote en el no-dónut?

G: Ciertamente ahora veo, oh maestro!, que no es fácil describir la forma de los objetos que se pueden ver en la naturaleza y conocer los rasgos que los diferencian. También veo que la ciencia de la Geometría, tal como la conocemos, no basta para resolver este proble - ma.

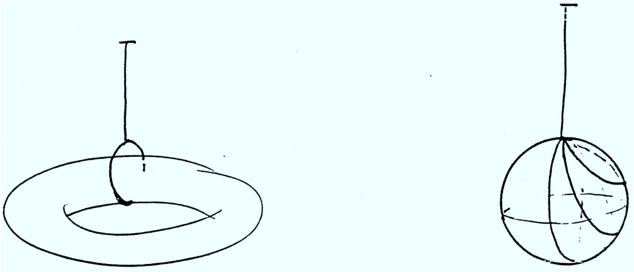
Sócrates y Glaucón no disponían de las herramientas necesarias para dilucidar la cuestión propuesta. Habría que esperar más de 2000 años hasta que Leonhard Euler (1707-1783) primero intuyera y Bernhard Riemann (1826-1866) y Henri Poincaré (1854-1912), entre otros muchos, establecieran las bases de la topología algebraica.

PRIMEROS MÉTODOS ALGEBRAICOS (EULER, RIEMANN, POINCARÉ, MORSE)

Veamos algunos métodos elementales -en su concepción- que permiten dar respuesta a las cinco preguntas planteadas en el apartado anterior.

El grupo fundamental

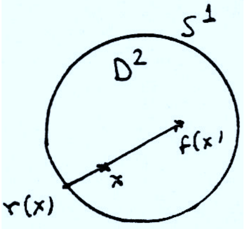
La respuesta al problema 5 es sí: El grupo fundamental del toro es $\pi(T,*) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, mientras que el de la esfera es trivial $\pi(S^2,*) = \{1\}$. Dicho de otra manera, un toro puede colgarse de un hilo sin que caiga (pasando el hilo por el agujero) mientras que una naranja no se puede colgar de un hilo sin que pueda escurrirse y caer.



La respuesta al problema 2 es no. Si *f(x)* fuera distinto de *x*, para todo punto *x* del disco D^2, la aplicación

$$r : D^2 \to S^1$$
$$x \to r(x)$$

sería una retracción



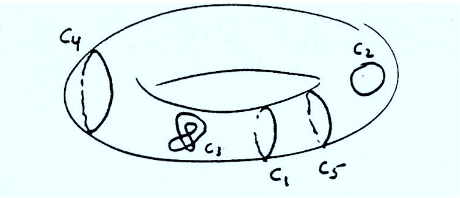
e induciría un epimorfismo entre los grupos fundamentales del disco y de la circunferencia, lo cual no es posible, ya que $\pi(D^2,*) = \{1\}$ y $\pi\,(S^1,*) \cong \mathbb{Z}$.

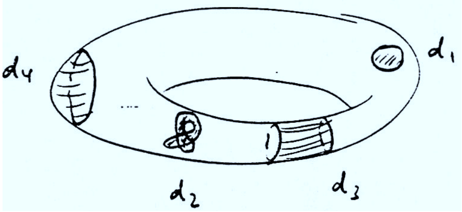
El primer grupo de homología

La respuesta al problema 5 es, como ya sabemos, sí: Si la esfera S^2 pudiera deformarse en un toro T, sus grupos de homología serían isomorfos, pero con coeficientes en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se tiene

$$H_1(T, \mathbb{Z} / 2\,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$H_1(S^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0\}$$

Dicho de otra manera: siempre que cortamos una naranja la partimos en dos partes (en la esfera, todo ciclo es borde, es decir, toda curva cerrada limita una zona de la superficie), pero, según como cortemos un dónut, hay que hacer dos cortes para separar un trozo (en el toro hay ciclos que no son bordes, es decir, hay curvas cerradas que no limitan ninguna zona de la superficie).

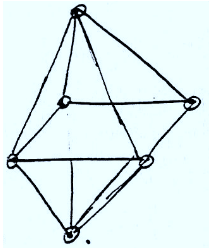




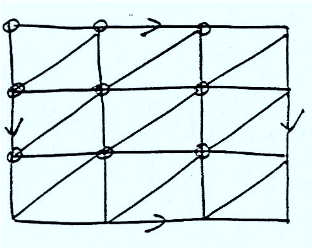
Este mismo método nos permite dar una respuesta afirmativa al problema 1.

La característica de Euler

La característica de Euler -definida como el número de vértice menos el de aristas más el de caras de una triangulación- nos resuelve, de nuevo el problema 5: La característica de la esfera es 2, mientras que la del toro es 0:



$X(S^2) = 6 - 12 + 8 = 2$

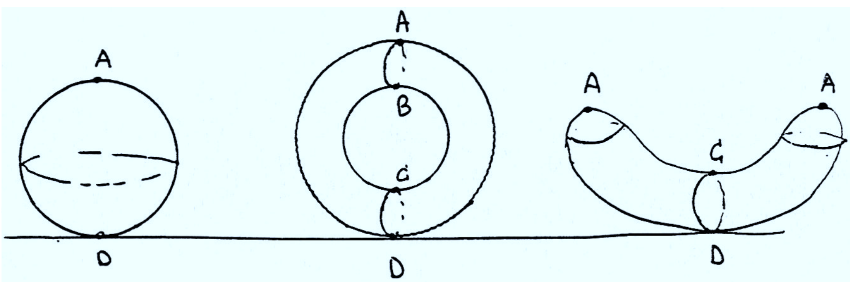


$X(T) = 9 - 27 + 18 = 0$

Este mismo método nos permite dar una respuesta negativa al problema 3: En efecto, el teorema de Hopf (Heinz Hopf 1894-1970) establece que la suma de las singularidades (contadas con su multiplicidad) de un campo vectorial tangente a una superficie es igual a la característica de Euler. Sobre la esfera, pues, todo campo vectorial tangente debe tener, como mínimo, una singularidad.

La teoría de Morse

De nuevo nos permite resolver los problemas 3 y 5: El teorema de Morse (Marston Morse) establece que, bajo determinadas condiciones, la suma de los puntos críticos de toda función con valores reales definida sobre una variedad es igual a la característica de Euler. Basta considerar entonces la función altura tal como se describe en la figura



Es decir, pensando nuestro objeto como si fuera una zona de terreno, la suma del número de cimas y de anti-cimas menos el de collados y de anti-collados es 0 en un caso y 2 en el otro.

Observación: La respuesta al problema 4 planteado al inicio es afirmativa. Es una consecuencia elaborada a partir del hecho de que el grupo fundamental de la esfera es trivial mientras que el de la circunferencia es el grupo de los enteros.

Invariantes algebraicos en topología

Podemos pensar la característica de Euler como un invariante numérico, que a cada espacio topológico le asigna un número entero -su característica de Euler-, de manera que espacios del mismo tipo de homotopía (es decir, espacios deformables con continuidad uno en el otro) tienen la misma característica

$$\begin{gathered} \mathrm{Top} \to \mathrm{Enteros} \\ X \to \chi(X) \\ X \approx Y\ (X \cong Y) \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y) \\ \chi(X) \neq \chi(Y) \Rightarrow X \not\approx Y\ (X \not\cong Y) \end{gathered}$$

Puesto que $\chi(S^2) = 2$ y $\chi(T) = 0$, resulta $S^2 \not\approx T$.

Sin embargo, si intentamos aplicar este mismo procedimiento a un toro y una botella de Klein (Felix Klein 1849-1925), resulta que la característica de Euler no los distingue, ya que en ambos casos vale 0. Habrá que considerar otros invariantes algebraicos que sean (en este aspecto) más potentes.

La característica de Euler nos permite clasificar las diferentes superficies compactas orientables -ya que son sumas conexas de toros y su característica es 2 - 2*n*, siendo *n* el número de toros-, así como las diferentes superficies no orientables -ya que, como sumas conexas de planos proyectivos, su característica es 2 - *n*, siendo *n* el número de planos-. Pero no permite distinguir entre ciertas superficies orientables y ciertas superficies no orientables (como es el caso del toro y de la botella de Klein).

De manera análoga el grupo de homología antes considerado puede interpretarse como un variante algebraico, que a cada espacio topológico le asigna un grupo abeliano, el primer grupo de homología con coeficientes módulo 2, de forma que espacios del mismo tipo de homotopía deben tener grupos isomorfos.

$$\begin{gathered}\mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}\\ X \to H_1\,(X;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}X \approx Y\,(X \cong Y) \Rightarrow H_1\,(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H\,(Y;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\\ H_1(X;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \ncong H_1(Y;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \Rightarrow X \not\approx Y\,(X \ncong Y)\end{gathered}$$

$$\left.\begin{aligned}H_1(S^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= 0\\ H_1(T;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\end{aligned}\right\} \Rightarrow S^2 \not\approx T$$

Sin embargo, de nuevo, este invariante algebraico no nos permite distinguir entre un toro y una botella de Kleinn, ya que para ambos espacios su primer grupo de homología con coeficientes módulo 2 vale $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Conviene, pues, introducir invariantes más potentes, o familias de invariantes, que nos permitan obtener mejores resultados. En esta línea conviene mencionar los grupos de homología de órdenes superiores

$$\begin{aligned}H_n(\ \ ,A) : \mathrm{Top} &\to \quad \mathrm{Ab} \qquad n \geq 0, \qquad A \in Ab\\ X \ &\to H_n\,(X;\,A)\end{aligned}$$

Para el caso $n = 2$ se tiene $H_2(T;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, H_2 (Klein; $\mathbb{Z}$) = 0, por lo que el toro y la botella de Klein definitivamente no pueden ser del mismo tipo de homotopía, no pueden deformarse uno en el otro.

Los grupos de homología también nos permiten distinguir entre esferas de diferentes dimensiones, pues al ser

$$H_i\,(S^n;\mathbb{Z}) = \begin{cases}\mathbb{Z} & i = 0,n\\ 0 & i \neq 0,n\end{cases}$$

resulta $S^n \not\approx S^m$, $n \neq m$.

Los dos invariantes considerados hasta ahora, el invariante numérico característica de Euler y el invariante algebraico grupos de homología, están relacionados entre sí por el teorema de Poincaré

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{rang} H_i(X;\mathbb{Z}) = \chi(X)$$

¿Qué ocurre con el grupo fundamental? El grupo fundamental es, de nuevo, un invariante algebraico que, esta vez, toma valores en la categoría de todos los grupos (no necesariamente abelianos)

$$\begin{gathered}\mathrm{Top} \to \mathrm{Gr}\\ X \to \pi(X,*)\end{gathered}$$

$$X \approx Y\ (X \cong Y) \Rightarrow \pi(X,*) = \chi(Y,*)$$
$$\pi\ (X,*) \ncong \pi\ (Y,*) \Rightarrow X \not\approx Y\ (X \ncong Y)$$

Puesto que $\pi(S^2,*) = \{1\}$ y $\pi\ (T,*) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, resulta $S^2 \not\approx T$, como ya habíamos observado antes.

Sin embargo, este invariante sí nos sirve para clasificar las superficies compactas, ya que, en el caso orientable, si *S* es la zuma conexa de *n* toros

$$\pi\ (S,*) = (a_1,b_1,...,a_n,b_n;a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}...a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}),$$

y en el caso no orientable

$$\pi\ (S,*) = (a_1,...,a_n;a_1a_1...a_na_n),$$

donde *n* es el número de planos proyectivos. Y dos de esos grupos (no abelianos en general) no son nunca isomorfos, como se comprueba fácilmente calculando sus abelianizados. Podría pensarse que el grupo fundamental, más potente que el primer grupo de homología, es suficiente para distinguir entre esferas de distintas dimensiones, pero no es así, puesto que $\pi\ (S^n,*) = \{1\}\ n \geq 2$. Para ello hay que introducir, como en el caso de la homología, una familia de grupos: los grupos de homotopía -el primero de los cuales coincide con el grupo fundamental-, definidos como clases de homotopía de las esferas en el espacio considerado.

Necesidad de nuevos invariantes

Podría pensarse que con la consideración de la característica de Euler, de los grupos de homología y de los grupos de homotopía, cualquier problema geométrico -topológico- puede ser remitido a un problema algebraico, pero -afortunadamente para el avance de la ciencia- no es así.

Es bien sabido que la circunferencia S^1 admite una estructura de grup abeliano (pensada como los números complejos de módulo uno), que la esfera S^3 admite una estructura de grupo (pensada como los cuaterniones de módulo uno) y que la esfera S^7 admite un producto no asociativo con unidad e inversos (pensada como las octavas de Cayley). En general una estructura de este tipo recibe el hombre de *H*-espacio y puede pensarse como un grupo topológico en el que la operación y las propiedades hay que entenderlas siempre "salvo una homotopía".

El problema que se plantea entonces de forma natural es el siguiente: ¿Cuando es la esfera S^n un *H*-espacio? La existencia de una multiplicación homotópica

$$S^n \times S^n \to S^n$$

nos lleva al de una aplicación contínua

$$f:\quad S^{2n+1} \to S^{n+1}$$
$$(x,y,t) \to (xy,t),$$

donde S^{2n+1} y S^{n+1} se interpretan como cocientes convenientes de $X=S^n \times S^n \times [0,1]$ e $Y = S \times [0,1]$ por ciertas relaciones de equivalencia.

Puesto que la clase de homotopía de *f* es un elemento de $\pi_{2n+1}(S^{n+1}) \cong \mathbb{Z}$, define un número entero *H(f),* que es un invariante topológico que se conoce como el invariante de Hopf de *f*; un invariante que nos permite, de nuevo, traducir algebraicamente el problema planteado anteriormente:

$$S^n \text{ es } H\text{-espacio} \leftrightarrow \exists f \text{ con } H(f) = 1.$$

Tras una serie de importantes aportaciones durante más de 25 años, fue finalmente John Frank Adams (1930-1989) quien dio una respuesta completa al problema de la existencia de estructuras de H-espacio en las esferas: Existe una aplicación *$f : S^{2n+1} \to S^{n+1}$ con invariante de Hopf igual a uno (y, por tanto, una estructura de* H *-espacio en* S^n*)* si y sólo si *$n = 1,3$ o 7.*

Pero como tantas veces suele ocurrir en matemáticas, la obtención de un nuevo resultado lleva, casi inmediatamente, a plantearse nuevos problemas. En efecto, cierto es (después de Adams) que las únicas esferas que admiten estructura de H-espacio son las de dimensión 1, 3 o 7, pero, precisamente estas estructuras son en los tres casos estructuras de grupo de Lie (variedad diferenciable con multiplicación diferenciable), salvo homotopías; es más, en 1960 todos los H-espacios conocidos eran del tipo de homotopía de un grupo de Lie. Se plantea, pues, el siguiente

Problema: ¿Existen H-espacios que no sean del tipo de homotopía de un grupo de Lie? La resolución de este problema no será posible hasta diez años más tarde a partir de la manipulación genética que Dennis Sullivan llevó a cabo en álgebra y en topología.

Técnicas de localización (laboratorio de genética)

La idea de Sullivan es mimética de la de la biología: simplificadamente, un ser humano está determinado totalmente por el conjunto de sus genes; un espacio topológico debería estar determinado también por sus "genes", que Sullivan define como sus localizaciones.

Sea p un número primo.

A cada grupo G se le asocia una colección (infinta!) de grupos G_p, uno para cada primo p. Por ejemplo,

$$\mathbb{Z}_p = \{\frac{a}{b}\ ;\ a,b \in \mathbb{Z},\quad b \text{ no múltiplo de } p\};$$

y si G *es conmutativo,* $G_p = G \otimes \mathbb{Z}_p$.

En topología, a cada espacio topológico X se le asocia análogamente una colección de espacios X_p, uno para cada primo p, de forma que

$$H_i\,(X_p) = (H_i\,(X))_p$$
$$\pi_i\,(X_p) = (\pi_i\,(X))_p$$

donde H_i y π_i indican los grupos de homología y de homotopía de los que he hablado anteriormente.

El estudio de las propiedades de los localizados de un grupo y de un espacio llevaron finalmente a Peter Hilton (1923-) y a Joseph Roitberg a construir a partir de los localizados -los "genes"- de un H-espacio conocido (por tanto, del tipo de homotopía de un grupo de Lie) un nuevo H-espacio que ya no era deformable a un grupo de Lie, dando así una respuesta afirmativa (y constructiva) al último problema que he planteado.

Las técnicas de localización (de las diferentes localizaciones que se han ido considerando en estos últimos 25 años) se han mostrado como herramientas muy potentes en la resolución de toda clase de problemas geométricos y constituyen hoy en día una de las áreas de la topología más activas en investigación.

BIBLIOGRAFÍA

ADAMS, J.F. *On the nonexistence of elements of Hopf invariant one.* Ann. of Math. 72 (1960), 20-104.

AGUADÉ, J. *Com distingir una taronja d'un dónut.* Bull. Sec. Mat. SCCFQM 5 (1980), 35-44.

HILTON, P.; MISLIN, G.; ROITBERG, J. Localization of nilpotent groups and spaces. *North Holland, Math. Studies 15, Amsterdam, 1975.*

MASSEY, W. Introducción a la topología algebraica. *Ed. Reverté, Barcelona, 1972.*

SULLIVAN, D. Geometríc topology, part I: Localization, periodicity and Galois symmetry. *MIT, 1970 (mimeographed notes).*