

**APLICACION DE MODELOS  
MATEMATICOS A LAS CURVAS DE  
CRECIMIENTO DE ESCOLARES  
VIZCAINOS:  
un estudio comparativo**

E. Rebato, J. Rosique

---

---

Cuadernos de Sección. Antropología-Etnografía 11. (1994) p. 225-240  
ISSN: 0213-0297  
Donostia: Eusko Ikaskuntza

*Bost eredu matematiko sailatu dira Bizkaiko 1690 ikasleren altuera eta pisu hazkundeari buruzko zeharkako datuen doikuntzarako, laginak bi sexuetao gazteak, 8 eta 19 urte artekoak biltzen zituelarik. Preece-Balnesen I. eredu hala mutilen nola nesken altuerari buruzko datuei hobekien egokitzen zitzaiena gertatu zen. Bere aldetik, funtzio logistikoa datu ponderalei hobekien egokitzen zitzaiena izan da. Altueraren inguruan lorturiko funtzioak herrien arteko konparazioak egiteko oinarri izan dira, bai eta dimorfismo sexuala deskribatzeko ere.*

*Se han probado cinco modelos matemáticos para el ajuste de datos tansversales del crecimiento en estatura y peso de 1690 escolares vizcaínos, de ambos sexos, con edades comprendidas entre los 8 y los 19 años. El modelo I de Preece-Baines resultó ser el que mejor se ajustaba a los datos de la estatura, tanto en varones como en mujeres. Por su parte, la función logística ha sido la que mejor se adaptaba a los datos ponderales. Las funciones obtenidas para la estatura han servido de base para realizar comparaciones interpoblacionales y para la descripción del dimorfismo sexual.*

*Cinq modèles mathématiques ont été essayées pour l'adaptation de données transversales de la croissance en taille et poids, chez 1690 scolaires biscariens, des deux sexes, et agés de 8 à 19 ans. C'était le modèle I de Preece-Baines qui s'adaptait le mieux aux données de la taille autant pour les garçons que pour les filles. Par ailleurs, la fonction logistique s'adaptait mieux aux données pondérales. Les fonctions obtenues pour la taille ont été utilisées pour réaliser de comparaisons entre populations différentes et pour la description du dimorphisme sexual.*

## I. INTRODUCCION

Distintos tipos de funciones matemáticas, dependiendo de las edades estudiadas, pueden ser adaptadas a los datos del crecimiento y desarrollo. Esta metodología supone una mejora respecto a otros métodos como los ajustes gráficos. Sin embargo, el éxito del ajuste matemático, depende de otros factores como la naturaleza de la variable estudiada (estatura, peso, etc.), la precisión de los datos obtenidos y la habilidad del modelo elegido para describir una parte del proceso de crecimiento del ser humano. Para la Auxología moderna, el estudio del crecimiento humano consiste esencialmente en el análisis de los cambios cualitativos y cuantitativos del organismo a partir de la concepción hasta la edad adulta (Hauspie, 1986). Las variables más significativas a la hora de abordar dicho análisis son: a) algunas variables *antropométricas*, como el peso y la estatura, talla sentado, diámetro biacromial y bicrestal, y b) *fisiológicas*, como la fuerza dinamométrica. La evolución de dichas variables a diferentes edades se plasma en la curva media de crecimiento de una población. Si el muestreo es representativo de la población en estudio, se puede también emprender, con finalidad biomédica, la construcción de las normas o *valores de referencia* (growth standards) para la población en cuestión.

La obtención de los valores de referencia en función de la edad puede realizarse a partir de estudios *transversales*, es decir, estudios en los que cada individuo es examinado una sola vez, o bien *longitudinales*, en los que se examina al mismo individuo varias veces y a intervalos regulares de tiempo a lo largo de una serie de años. El método más usual para la obtención de dichos valores es el transversal, por presentar ventajas en cuanto a consumo de tiempo, pero sus mayores inconvenientes son que se necesitan muestras muy grandes y que los datos no permiten calcular adecuadamente algunos parámetros biológicos, como la velocidad de crecimiento. Así, la construcción de las curvas de referencia poblacionales para el crecimiento humano, en la mayor parte de los países europeos, se ha venido realizando mediante estudios de tipo transversal. Aunque actualmente los pediatras valoran más los datos de tipo longitudinal, la antropología contemporánea se sigue beneficiando ampliamente del enfoque de tipo transversal. Por otra parte, para evaluar el progreso de un chico entre dos fechas diferentes se suelen utilizar curvas longitudinales (preferiblemente de velocidad). Las curvas de velocidad, construidas con intervalos de tiempo menores de un año, han proporcionado datos sobre los efectos estacionales en el crecimiento infantil (Berkey et al. 1983).

Independientemente del *método de muestreo*, podemos ajustar las curvas de distancia, es decir, la representación gráfica de la dimensión alcanzada (estatura, talla sentado, peso, etc.) en función de la edad, a modelos matemáticos teóricos. La estima de los parámetros del modelo y su interpretación biológica nos ayudará a caracterizar a la población y a predecir algunos parámetros valiosos, como *la estatura adulta* que alcanzará la población en crecimiento o la edad promedio del estirón puberal.

Suponiendo un tratamiento correcto en la construcción de las curvas de referencia transversales, su uso estaría limitado a responder preguntas tales como ¿posee un niño, a cierta edad, una estatura normal respecto a la población a la que pertenece? Otra aplicación sería la de comprobar si el modelo de crecimiento difiere entre poblaciones distintas. Sin embargo, este método presenta inconvenientes cuando se quiere realizar un seguimiento individual de un chico a lo largo de un cierto intervalo de tiempo. Además las curvas de referencia transversales adolecen del hecho de suavizar artificialmente ciertas características del modelo (Wachholder and Hauspie 1986).

### 1.1. Antecedentes

Los primeros modelos para el ajuste de curvas de crecimiento fueron aplicados al estudio de la estatura en función de la edad. Sin embargo, éstos no podían describir el crecimiento globalmente, es decir, desde el nacimiento hasta la edad adulta, sino que se trataba de funciones que se aplicaban de modo específico por cada período del crecimiento (p.e.: infancia, adolescencia, etc.). Son de este tipo los modelos desarrollados por Count (1942), aplicados al crecimiento de preadolescentes. Para la pubertad, y teniendo en cuenta la forma de la curva cuando se produce el estirón puberal, se pueden ajustar bien modelos logísticos o de Gompertz. Los parámetros derivados son relativamente sencillos de interpretar. Otros modelos en uso, que se adaptan bien a la etapa de la adolescencia, son: las funciones de regresión cuadrática y la regresión de Reed; ambos tipos se han aplicado con éxito en estudios transversales (Jayasekara et al. 1988, Vercauteren 1989).

Para describir el crecimiento de forma más global, se intentó en primer lugar combinar dos funciones de Count (una desde el nacimiento hasta los siete años y la otra desde esa edad hasta el estirón puberal) con una curva logística para la adolescencia. Pero este tipo de modelos, basados en la suma de varias funciones, subestiman algunos parámetros. Esta situación se prolongó hasta que se obtuvieron funciones de tipo logístico para el proceso completo de crecimiento. En esta línea, Preece y Baines (1978) comprendieron que la estima de los parámetros del crecimiento se podía obtener mejor cuando se examinaba la curva de velocidad de crecimiento. Si suponemos que la tasa de crecimiento es proporcional a la diferencia entre el tamaño en la madurez ( $Y_m$ ) y el tamaño alcanzado a la edad 't' ( $Y(t)$ ), entonces:

$$dY(t)/dt = S(t) [Y_m - Y(t)]$$

Para determinar la forma de la curva, deberíamos determinar  $S(t)$ . Generalmente  $S(t)$  se puede aproximar muy bien a una curva logística o doblemente logística. Si  $S(t)$  es logística, el modelo se resuelve estimando 5 parámetros:

$$Y(t) = Y_m - 2(Y_m - Y_c) / \{e^{[s_0(t-c)]} + e^{[s_1(t-c)]}\}$$

$s_0$ , asíntota inferior. Se relaciona con la velocidad de crecimiento prepuberal.

$s_1$ , asíntota superior. Se relaciona con el pico de la velocidad máxima del crecimiento puberal.

$c$ , edad al punto de inflexión, es decir, aproximadamente la edad al momento en que la velocidad es máxima. La estatura a esta edad es  $Y_c$ .

$Y_m$ , tamaño adulto.

Aunque también se han desarrollado otros modelos, como el doble logístico de Bock et al. (1973), la tendencia general es a basarse en presupuestos similares a los de Preece y Baines, es decir: i) considerar el proceso de crecimiento en sentido global, desde el nacimiento o desde la primera infancia a la edad adulta, ii) considerar el número de parámetros adecuado a estimar entre 5 y 6, ya que añadir más parámetros dificulta su interpretación biológica y iii) tratar de adaptar la función lo mejor posible al estirón puberal.

Uno de los modelos más recientes (Pontier et al 1988), es el conocido como JPPS, iniciales de sus autores: Jolicoeur, Pontier, Pernin, Sempé. El modelo se adapta muy bien a todo el período de crecimiento, es decir, desde el nacimiento hasta la edad adulta. Aunque depende de un número mayor de parámetros: siete; este número no se considera excesivo. Siendo X la estatura y t el tiempo, la función tiene la siguiente forma:

$$X = M ( 1 - [1/1 + (t/d_1)^{c_1} + (t/d_2)^{c_2} + (t/d_3)^{c_3}] )$$

Los parámetros son todos valores positivos:

**M**, talla adulta.

**d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub>, d<sub>3</sub>**, duraciones, en años. Deben cumplir que  $d_1 \leq d_2 \leq d_3$ .

**c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub>, c<sub>3</sub>**, parámetros sin unidades

El significado biológico de los seis últimos parámetros todavía es confuso, como los mismos autores del modelo indican. Pero es posible derivar de ellos parámetros de mayor significación.

Sin embargo, tanto el modelo doble logístico de Bock et al. (1973) como el modelo conocido como JPPS (Pontier et al 1988), no se adaptan bien al rango de edades utilizado en la presente investigación, ya que presuponen un período prepuberal más extenso.

## II. MATERIAL Y METODOS

### II.1. Población objeto de estudio

Esta investigación se realiza dentro de un proyecto de trabajo más general sobre Crecimiento y Desarrollo somático en población vasca (en las comarcas costeras vizcaínas: *Busturia y Uribe - Costa*). Los grupos de la población que se encuentran en período de crecimiento (población infantil, adolescentes y subadulta) son los más sensibles a factores ambientales desfavorables y, por ello, se requiere poder elaborar curvas de crecimiento que sirvan como patrones para la detección de cualquier tipo de problema de crecimiento y de salud en general. La muestra estudiada comprende 1690 individuos de ambos sexos y de edades comprendidas entre los 8 y los 19 años. La estima de los parámetros de los modelos de crecimiento representa una etapa importante en el estudio antropológico de la *población vasca*, así como la comparación entre los distintos modelos, para evaluar cual se adapta mejor a este grupo humano que tanto interés despierta en la Comunidad Científica Internacional. Con carácter general es la primera vez que se emprende un estudio de este tipo en el área de la Antropología Física Vasca. Para obtener las medidas antropométricas, se ha utilizado el protocolo estandarizado por el IBP (Weiner and Lourie, 1981).

## II.2. Material

Material antropométrico de uso habitual: antropómetro, compases de ramas curvas, calibres y cintas métricas. Peso digital ( $\pm 0,5$  Kg). Calibre de Lange, para medir el espesor de la grasa subcutánea. Un ordenador IBM, modelo AT y un ordenador Macintosh de APPLE C. Inc. Software avanzado para el tratamiento estadístico y bases de datos.

## II.3. Análisis de la información

El *tratamiento informático* de los datos, se ha llevado a cabo mediante los paquetes estadísticos SPSS/PC<sup>+</sup> y BMDP. El subprograma AR de regresión no lineal del BMDP, es el más adecuado para el cálculo simultáneo de los parámetros de las funciones que se pretenden analizar.

Las medias por intervalo de edad para la dimensión estudiada, se utilizan como variable dependiente en la ecuación del modelo que se quiere ajustar. La variable independiente es la edad, medida en años. Seguidamente se introduce la función en el subprograma de regresión no lineal, para estimar los parámetros del modelo mediante iteraciones sucesivas, según el método de Gauss-Newton. Este mismo proceso se repite para cada modelo que se quiere probar, con fines comparativos. El estudio de la bondad de ajuste puede realizarse posteriormente, según distintos criterios. El ajuste que menor varianza residual deja, o el que presente residuos menores entre valores separados y observados, se toma como el modelo que mejor se ajusta a los datos. La suma de cuadrados residuales (RSS) es una buena forma de estimar este criterio. La curva que proporcione valores menores de RSS es, en definitiva, la que mejor se ajusta.

Las funciones matemáticas utilizadas comúnmente para ajustar datos del crecimiento pueden clasificarse en dos grandes grupos: estructurales y no estructurales. En el primero se incluyen aquellos modelos que poseen parámetros a los que se les puede atribuir cierto significado biológico y en el segundo podemos encontrar los modelos con parámetros sin un significado preciso.

Los modelos que se han probado son los siguientes:

### a) Modelos estructurales:

I. Modelo 1 de Preece-Baines (1978):

$$Y(t) = Y_m^{-2}(Y_m - Y_c) / \{e^{[s_0(t-c)]} + e^{[s_1(t-c)]}\}$$

II. Regresión logística (Marshall y Tanner, 1986).

$$Y = c / (1 + e^{(a-bX)})$$

III. Función de Gompertz (Marubini et al. 1971).

$$Y = P + K e^{-e^{-(a-bt)}}$$

**b) Modelos no estructurales:**

IV. Regresión de Reed (Berkey and Reed, 1987).

$$Y = a + b X + c \ln(X) + d/X$$

V. Regresión cuadrática (Jayasekera, 1988).

$$Y = a + b X + c X^2$$

**II.4. Comparación entre los ajustes de funciones diferentes**

El problema de elegir el mejor ajuste puede complicarse cuando estamos comparando muestras de distintas poblaciones, o cuando comparamos estudios de la misma población con diferente número de datos. En este caso, para elegir el mejor ajuste, el método más usual es el del cálculo del error típico de la estima (SEE). El ajuste con menor SEE puede ser elegido como el mejor. Este error se puede estimar del siguiente modo:

$$SEE = \sqrt{(RSS/N-k)}$$

RSS = suma de cuadrados residuales del ajuste. N-k = n° de grados de libertad (gl), siendo N = n° de datos y k = n° de parámetros a estimar. Aunque el valor máximo de k es N-1, los ajustes de una serie de datos en condiciones límite poseen errores considerables y deberían ser desestimados.

**III. RESULTADOS Y DISCUSION**

Los resultados de los ajustes de las cinco funciones al peso y estatura de los individuos de la muestra estudiada arrojó los resultados que se indican en las tablas I y II. El orden en que aparecen las funciones es el de menor a mayor SEE. La función con menor SEE es aquella que mejor se ajusta a los datos observados.

**1. Estatura**

VARONES			MUJERES		
FUNCION	RSS cm <sup>2</sup>	SEE cm <sup>2</sup>	FUNCION	RSS cm <sup>2</sup>	SEE cm <sup>2</sup>
PREECE-BAINES	4,697	0,969	PREECE-BAINES	0,815	0,404
LOGISTICA	6,176	1,015	LOGISTICA	1,179	0,443
REED	7,302	1,103	GOMPERTZ	2,325	0,623
GOMPERTZ	9,200	1,238	REED	7,984	1,154
CUADRATICA	28,239	2,009	CUADRATICA	9,626	1,172

Tabla I. Para la variable estatura, el modelo I de Preece-Baines es el que mejor se ajusta tanto en la muestra femenina como en la masculina.

## 2. Peso

VARONES			MUJERES		
FUNCION	RSS	SEE	FUNCION	RSS	SEE
	Kg <sup>2</sup>	Kg <sup>2</sup>		Kg <sup>2</sup>	Kg <sup>2</sup>
LOGISTICA	10,019	1,292	LOGISTICA	1,228	0,452
REED	10,764	1,339	PREECE-BAINES	1,225	0,495
GOMPERTZ	10,833	1,344	GOMPERTZ	1,718	0,535
PREECE-BAINES	9,529	1,381	REED	10,405	1,317
CUADRATICA	20,094	1,694	CUADRATICA	14,146	1,422

Tabla II. Para la variable peso, el modelo Logístico es el que mejor se ajusta tanto en la muestra femenina como en la masculina.

### Ecuaciones estimadas:

Seguidamente se indican los valores de los parámetros estimados para cada una de las ecuaciones seleccionadas mediante el criterio que se ha expuesto en el párrafo anterior.

Estatura: modelo I de Preece-Baines

Varones:

$$y = 174,521 - ((2*(174,521-161,39))/e^{(0,088*(t-13,959))} + e^{(0,905*(t-13,959))})$$

Mujeres:

$$y = 160,909 - ((2*(160,909-151,92))/e^{(0,133*(t-12,238))} + e^{(1,365*(t-12,238))})$$

Peso: función logística

Varones:

$$y = 26,400 + (48,528/(1+e^{(5,967-0,447*t)}))$$

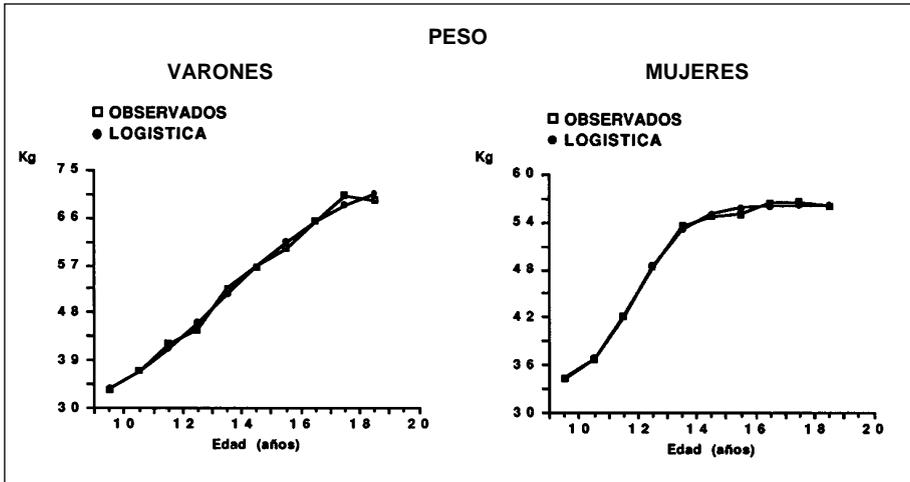
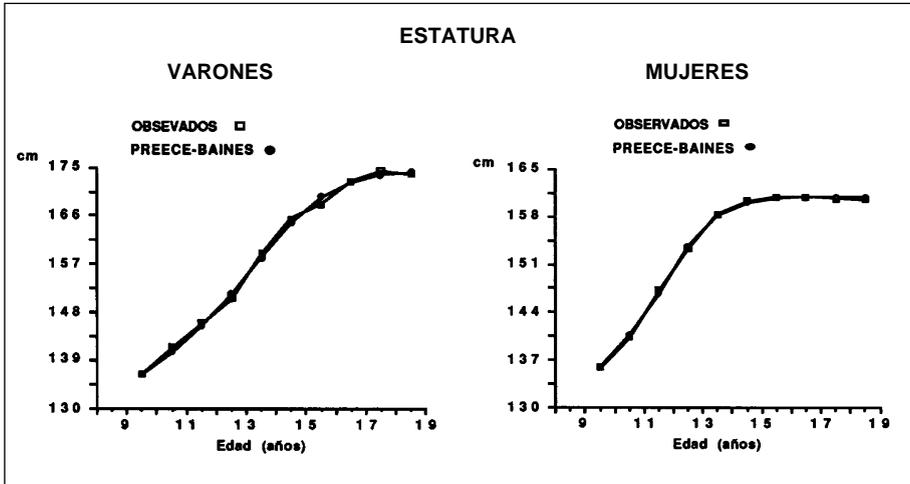
Mujeres:

$$y = 32,910 + (23,307/(1+e^{(13,642-1,149*t)}))$$

### COMPARACIONES CON OTRAS POBLACIONES:

#### Gran Bilbao:

A partir de los datos del estudio longitudinal de Ruiz (1989), realizado en el Gran Bilbao (medias estaturales observadas para la edad cronológica), se ha procedido a aplicar el **modelo I de Preece-Baines**, tanto para varones como para mujeres. Las ecuaciones obtenidas son las siguientes:



Varones:

$$y = 175,566 - ((2 * (175,566 - 162,63)) / (e^{(0,100 * (t - 14,371))} + e^{(0,947 * (t - 14,371))}))$$

$$RSS = 0,562 \text{ cm}^2$$

$$SEE = 0,335 \text{ cm}^2$$

Mujeres:

$$y = 160,514 - ((2 * (160,514 - 146,44)) / (e^{(0,060 * (t - 11,652))} + e^{(0,808 * (t - 11,652))}))$$

$$RSS = 0,245 \text{ cm}^2$$

$$SEE = 0,221 \text{ cm}^2$$

### Segovia (medio rural):

Las ecuaciones para la estatura obtenida a partir de la aplicación del modelo I de Preece-Baines al estudio transversal de Bernis et al. (1984), han resultado ser las siguientes:

Varones:

$$y = 169,14 - ((2 * (169,14 - 162,78)) / e^{(0,193 * (t - 14,99))} + e^{(1,38 * (t - 14,99))}))$$

$$RSS = 5,84 \text{ cm}^2$$

$$SEE = 1,21 \text{ cm}^2$$

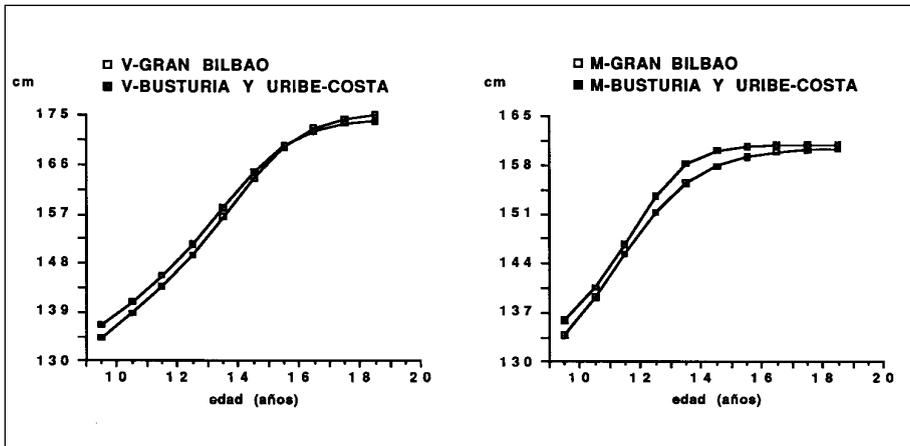
Mujeres:

$$y = 160,75 - ((2 * (160,75 - 150,68)) / e^{(+0,11 * (t - 13,10))} + e^{(0,77 * (t - 13,10))}))$$

$$RSS = 5,03 \text{ cm}^2$$

$$SEE = 1,00 \text{ cm}^2$$

En las gráficas que aparecen a continuación, se puede observar la discrepancia entre el estudio longitudinal en el Gran Bilbao, de Ruiz (1989) y el presente estudio (Busturia y Uribe-Costa). En varones, dichas diferencias, pueden localizarse en el período prepuberal y puberal, mientras que en las mujeres son más generalizadas, extendiéndose a todo el período de muestreo. En todas las figuras V indica varones y M indica mujeres.

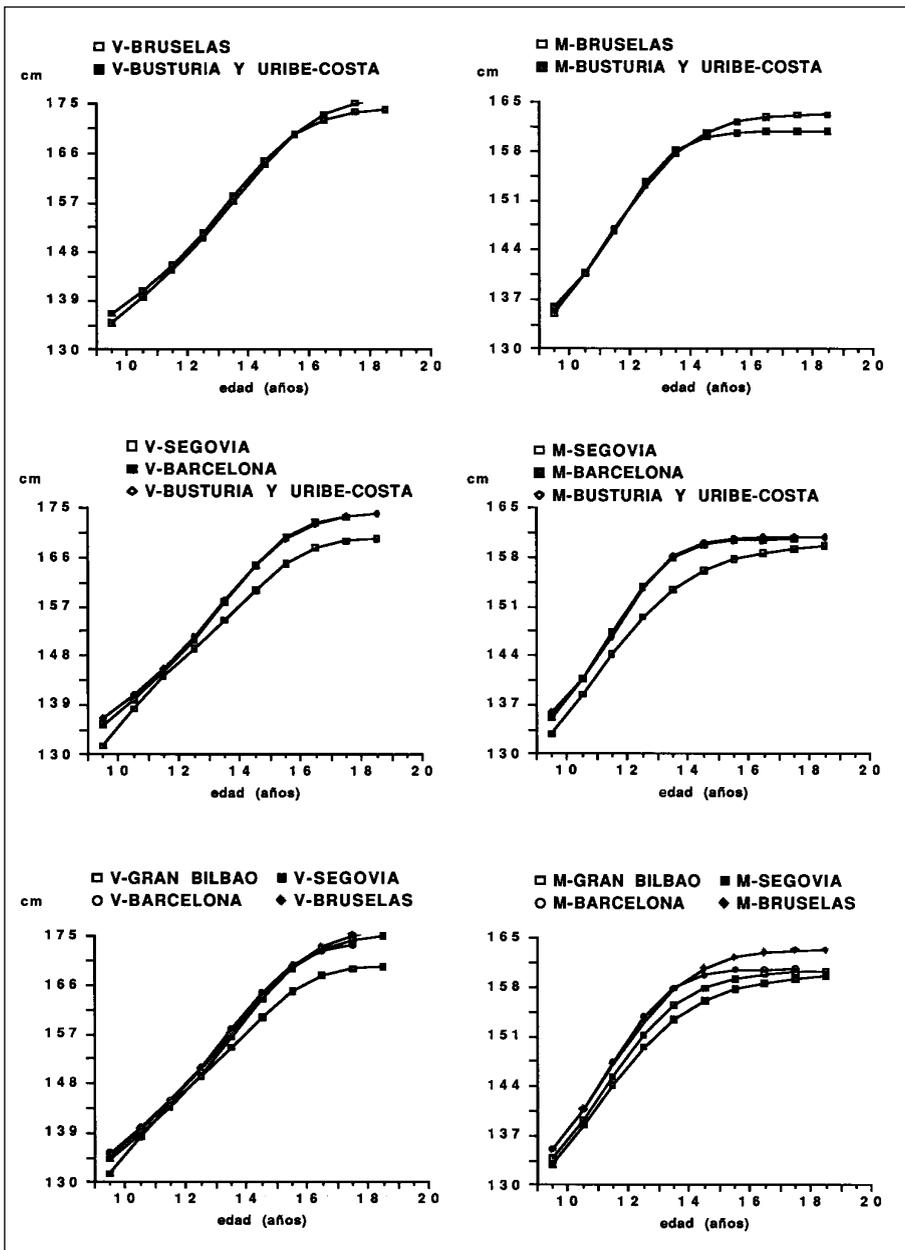


Se ha comparado también con otras dos muestras transversales de la bibliografía más reciente: Barcelona (Generalitat, 1986-87) y Bruselas (Vercauteren, 1989). No existiendo datos observados en las publicaciones correspondientes, los datos utilizados para la comparación, son los valores esperados de la estatura (P50) para cada clase de edad cronológica. Así pues, no se han obtenido las ecuaciones del modelo I Preece-Baines.

En varones, las diferencias entre el presente estudio y los otros dos mencionados, son mínimas. Aunque el individuo adulto belga resulta ser algo más alto. Sin embargo en las gráficas

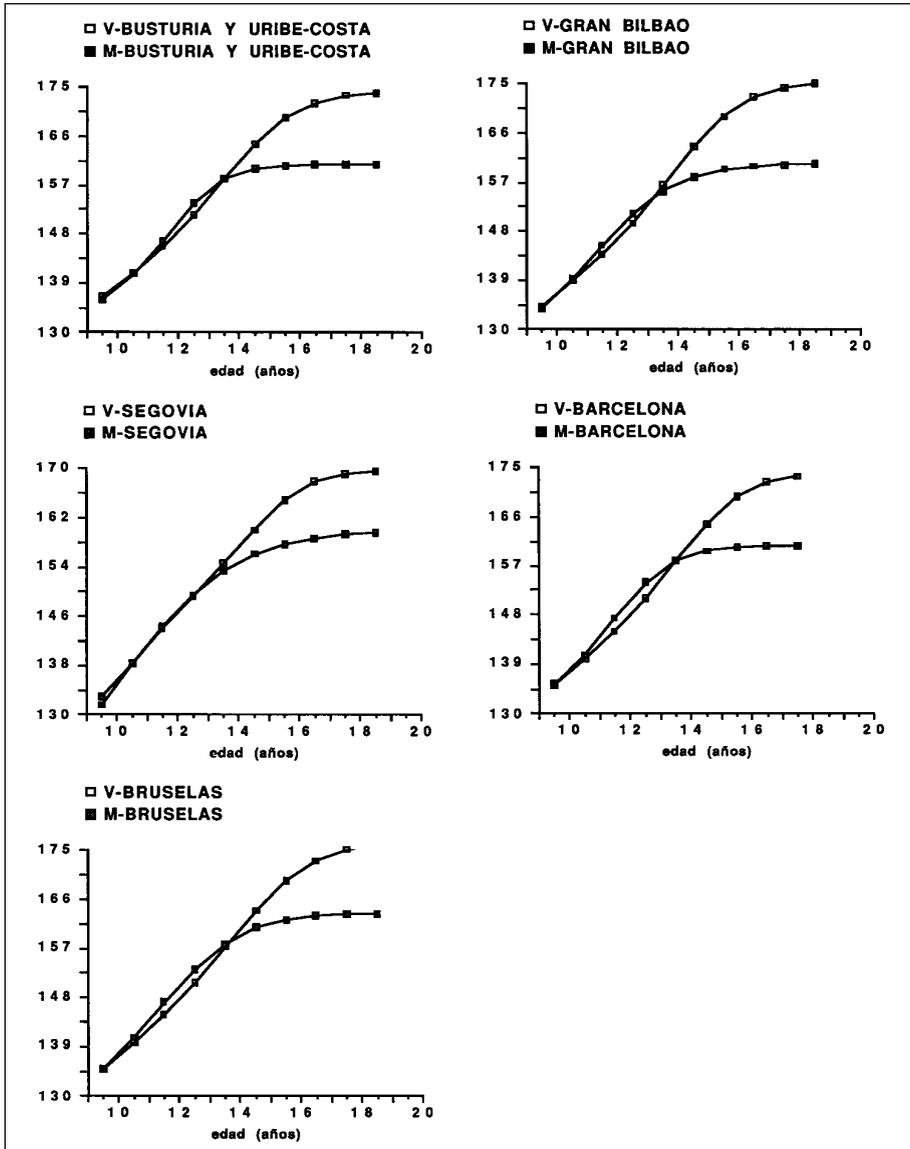
ficas referentes a las mujeres, se puede ver que, la diferencia entre las belgas y las demás españolas es notable a partir de los 14 años de edad, aproximadamente.

La población rural de Segovia (Bernis et al. 1984) queda siempre por debajo de todas las demás tanto en varones como en mujeres.



### DIMORFISMO SEXUAL.

Las funciones que se han obtenido anteriormente pueden ser utilizadas para la descripción y cuantificación del dimorfismo sexual en las poblaciones estudiadas. V indica varones y M indica mujeres. Las curvas de Barcelona y Bruselas no se han representado mediante el cálculo de las funciones correspondientes, sino que representan los valores esperados publicados (Generalitat, 1986-1987 y Vercauteren 1989).



## BIBLIOGRAFIA

BERKEY C.S. and REED R.B., 1987: A model for describing normal and abnormal growth in early childhood.- Hum. Biol., 59, 973-987.

BERKEY C.S., REED R.B. and I. VALADIAN, 1983: Longitudinal growth standards for preschool children. Ann. of Hum. Biol. v. 10 nº 1, 57-67.

BERNIS C., F. OCHOA, C. PEREZ, C. PRADO, A. GOMEZ, M. SANDIN, V. SARIÑENA y C. VARELA, 1984: Crecimiento y desarrollo en niños rurales de Segovia. Bol. de la Soc. Esp. de Antropología Biológica, nº 5, 7-18.

BOCK R. D. et al., 1973: A parameterization for individual human growth curves.- Hum. Biol., 45, 63-80.

COUNT E.W., 1942: A quantitative analysis of growth in certain human skull dimensions.- Hum. Biol., 14, 143.

GENERALITAT DE CATALUNYA, 1986-1987: Estándards transversals del creixement de la població infantil i adolescent de Catalunya (1986-1987). Departament de Sanitat i Seguretat Social.

HAUSPIE, R., 1986: Croissance.- L'Homme, son evolution sa diversit'e. Ed. du CNRS, Paris.

JAYASEKARA R. et al., 1988: Adolescent Growth in Stature among Sinhalese Males: Preliminary Results of a Cross-Sectional Study.- Hum. Biol., 60, 825-831.

MARSHALL W.A. and TANNER J.M., 1986: Puberty en Human Growth, v. 2, Postnatal Growth. F. Falkner and J.M. Tanner, eds. New York: Plenum Press.

MARUBINI, E. et al., 1971: A comparative fitting of the Gompertz and logistic functions to longitudinal height data during adolescence in girls.- Hum. Biol., 44, 511-524.

PONTIER J. et al., 1988: Modelisation de la courbe de croissance staturale chez l'enfant: le modèle JPPS.- Cahiers d'Anthrop. et Biom. Humaine (Paris).

PREECE M.A. and BAINES M.J., 1978: A new family of mathematical models describing the human growth curve.- Ann. of Hum. Biol., 5, 1-24.

RUIZ I., 1989: Estudio Longitudinal del crecimiento en la etapa puberal en una muestra de escolares del Gran Bilbao. Tesis doctoral. Univ. del País Vasco UPV/EHU.

VERCAUTEREN M., 1989: Aspects de l'évolution seculaire en Belgique. Analyse de la Croissance en Relation avec differents parametres du milieu. Thesis doctoral. Univ. Libre de Bruxelles.

WACHHOLDER A. and R.C. HAUSPIE, 1986: Clinical standards for growth in height of Belgian boys and girls, aged 2 to 18 years. Internat. Journal of Anthrop. v. 1, nº 4, 327-338.

WEINER J.S. and LOURIE J.A., 1981: Practical Human Biology.- Acad. Press. London.